

刘晓力著，湖南教育出版社2000年9月出版。

叶闯

存在柏拉图式的数学概念实体是哥德尔在哲学方面最重要的一个结论。《理性的生命——哥德尔思想研究》一书的作者用了整整一章来讨论这个问题，书中所列哥德尔对数学柏拉图主义的主要论证确实是哥德尔在他的著作中最强调的那些论证。现在我就在这本书工作的基础上，从诸多可能的观察点中选择一个观察点，也来看一看哥德尔为他的概念实在论所作的论证。我所选择的观察点，就是直觉或者哥德尔说的“数学直觉”对柏拉图主义数学观的证明作用。

哥德尔的数学实体是柏拉图式的，是概念世界的存在物。它既不在物理的世界中，也不在心灵的世界中。柏拉图意义上的存在是“很强的”。它要求存在者存在于一个概念、形式或理念等等构成的世界中，不在任何意义上为人的思想所决定。仅说数学对象是客观的，不由我们的随意选择和创造所决定，还不足以表明对象是柏拉图实体。哥德尔讲到这一点时曾说：“此点绝对不能决定这些客观的实体是什么——特别不能决定它们是在自然中，在人的心中，还是两者都不在。关于数学本质的三个观点准确地对应于关于概念本质的三个观点，传统上这三个观点分别被称为心理主义、亚里士多德的概念主义和柏拉图主义。”（“Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”，见G del, p.312,n.17）这意味着它并不由于成为有限思想者的“研究对象”而具有存在性。而其他东西，诸如“飞马”、“摩西”或者历史上哲学家们所言之部分的“虚存”，虽可以在相当程度上独立于心灵，然则毕竟与人心有关联，因此也就很难说它们是柏拉图的。哥德尔的抽象实体的存在性质倒是与弗雷格的意义和思想的存在性质颇为相似，不知为什么在哥德尔表达他的数学柏拉图主义的几篇主要文章中，没有对弗雷格的学说给予应有的注意。不论这其中的原因是什么，也不论哥德尔与弗雷格在这方面有何种类型的相似性，他的数学形而上学观念与弗雷格的相应观念还是有重要的区别。在数学柏拉图式实体存在的证明上，弗雷格倚重于数学和逻辑本身显示出来的其真理或其陈述的真值的客观性质，它们不依赖于你和我的思考与信念。但与真相关联的所谓“客观性”不是符合论意义上的，比如不是一幅肖像画与某人相像那种意义上的。思想的客观性不产生于任何的符合，而仅仅依赖于思想作为柏拉图实体存在的形而上学特征。更进一步，真值本身也可以是柏拉图世界的存在物（就弗雷格对真概念的一种理解，或至少就其一个时期的理解来说）。如此真的思想与不真的思想具有完全一样的客观性。

弗雷格有关思想和数学柏拉图式实体存在的证明在三个方面表现出特色。第一个特色是他利用思想的可交流性作为一个证据。可交流性显然不是柏拉图世界存在的根据，但可以是证据。因此，虽则疼痛作为一种心理状态具有第一人称权威，可关于疼痛的思想却能由医生和病人共享。共享与交流反过来支持柏拉图式的形而上学。于是弗雷格论证的第二个特色是他要求心理的东西与逻辑的东西的严格区分，比如思想（thought）与思想的心理状态（thinking）、真与认为真之间的严格区分。第三个特色是他利用了日常人们对数学客观性的直观理解。毕达哥拉斯定理之真无时间性，不依赖于任何人是否发现和思考它。而且，没有任何人是这个定理的拥有者，就像拥有一件时装或一个感觉印象。此种非私有的特征留下了（但并非保证了）交流的可能性。弗雷格说：“一个思想并不像一个观念属于拥有它的那个人一样，特别属于思考它的那个人：每一个掌握这个思想的人都以同样的方式遭遇同一个思想。否则两个人永远不可能把同一个思想赋予同一个句子，而是每人都有他自己的思想；……不同人的断定之间相互矛盾则完全不可能了……”（“Logic”，见Frege, p. 133）

弗雷格在第二个方面的特色表现出他最关键的想，一种毫不含糊的严格性。他不使用任何哪怕有一点心理学嫌疑的要素来论证自己的思想世界之柏拉图式的存在，无论是直觉还是绝对意识。在分析哲学和欧洲大陆哲学的起点处，新哲学的开创者们在思想上曾有某些共通的东西，比如弗雷格和胡塞尔都声称要反对心理主义。他们俩人之间也感到有需要交流的东西，如此才有他们之间的通信。但他们最终走上了不同的道路。现在，哥德尔似乎又在两条道路之间搭桥，因此他走的是与弗雷格不同的道路。哥德尔在陈述他的柏拉图式的数学哲学观念时，与弗雷格在陈述同一问题时差别并不明显，而在论证他的这个哲学观点时，差别就显示出来了。弗雷格的论证不需要胡塞尔的现象学。从根本上说，现象学是反柏拉图主义的，而弗雷格的形而上学是以第三领域的实体存在为基础的。因此，如果哥德尔要对胡塞尔的学说感兴趣，且他的理论要有前后一致性，则他对胡塞尔的兴趣就只能使用于他的纯粹方法论的领地，比如他可以将胡塞尔教给的方法使用于证明他的柏拉图式的数学实在论。而要更深入地运用胡塞尔的学说，哪怕只是为了上述的证明真正有效，他就得论证直觉或直观与实体存在有必然性的关系。但不管哥德尔对胡塞尔学说有何种程度的运用，他对胡塞尔在理论上的兴趣和欣赏的确是十分真实的。

哥德尔对他的数学实体的存在有许多论证，最重要的是在以下三个方面（三个方面互有交叉，但侧重不同）。一个方面是在批评的角度上，以批评数学的约定论之不合理，来证明数学不是一种约定。这个批评的主要对象是卡尔纳普，他把数学解释为一种没有内容的逻辑句法，坚持数学直觉可以被有关符号使用的约定所代替。（“Is mathematics syntax of language?(1953/9-V)”，见G del,p 356）与约定观念相联系的数学是我们的自由创造的观点也是哥德尔激烈批评的对象。第二个方面的论证部分地也是在批评的角度

上,批评算法主义,同时解释哥德尔定理与判定机器能否思维这一问题的关系。在这个工作中,1951年哥德尔在布朗大学所作的吉布斯讲演具有代表性。他在那里提出的著名的选言判断,其中第二个选言支若成立则是对柏拉图主义本体论的强支持。(参见“Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”,见Gödel,以及《理性的生命》,第4.4节)。

第三个方面的论证是直接说明数学直觉的不可消去性(non-eliminability)。这个论证虽然经常用作反对数学的约定主义的一个论据,但由于数学直觉对于哥德尔理论的基本的重要性,几乎使用于他的所有其他主要论证中,故具有独立的意义。借助数学直觉的论证其独特性还不仅于此,关键是它使哥德尔的理论现象学有了联系的桥梁。

在一个数学的公理系统中,必有非定义的初始概念和对于它们成立的公理,使得定义和证明成为可能。“对这些公理,不存在其他合理的(且不只是实践上的)基础,除了要么它们(或它们所蕴涵的命题)可以直接被知觉(perceived)到是真的(基于词项的意义或根据对词项所涵摄之对象的直觉),要么它们(像物理假说一样)以归纳论证为基础被假设,比如以它们在使用中的成功为基础。”(“Is mathematics syntax of language? (1953/9-III)”,见Gödel, pp. 346-347)在更早些时候,哥德尔谈意义或概念实体时也用了“知觉”这个说法:“不论怎样,错误在于词项的意义(也就是说,它们所指谓的概念)被断定为某种人造的东西,且仅在于语义学约定。而我相信,真理在于这些概念构成了它们自己的一个客观实在,我们不可能创造或改变,而只能知觉和描述它。”(“Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”,见Gödel, p.320)就是在对抽象概念或意义的把握上,对抽象事物的知觉和数学的直觉实质性地进入哥德尔的哲学论证,胡塞尔的方法也就随之进入哥德尔的哲学视野。哥德尔说:“……人们很明显需要未定义的抽象概念和对它们成立的公理。否则,人们便没有了定义或证明的出发点。这个程序至少很大程度上在于意义的澄清,而那并不在于给出定义。……那么,事实上今天一个科学已开始其存在,它宣称拥有这种意义澄清的系统的方法,那就是胡塞尔所创立的现象学。”(“The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy”,见Gödel, p. 383)

于是,哥德尔与弗雷格在存在论问题上的区别在此就显现出来。对弗雷格,人对数学实体的意识不是实体存在的核心论证。而对哥德尔,人对数学实体和数学内容的直觉意识是他的论证的一个核心要素,他的数学柏拉图主义的论证实质性地依赖于它。于是就有了哥德尔对胡塞尔学说的欣赏,从而使他的理论至少通过胡塞尔与康德有了间接的联系。而对弗雷格,严格地说在他对其形而上学的论证中用不到后面这两人的学说。不论怎样,哥德尔确实设想某些类型数学直觉的存在能成为柏拉图数学实体存在的证明。但真要想通过某类直觉存在证明柏拉图实体存在,至少有如下几件事需要做:第一,说明有一些直觉是数学中确实存在的,它具有特殊的性质;第二,说明这些直觉是不可消除的,即说明这些直觉不可能由一些纯语法的系统表达它可以表达的全部,而没有任何信息损失;第三,证明这些直觉是真正独特的,它不是非柏拉图主义者所说的那些直觉的特殊表现形式,即它不能被解释为非柏拉图主义者的那些直觉;第四,证明这种既不可与其他类型直觉相同化、又不可消去的直觉确与柏拉图实体存在有特殊关系,以保证这种直觉的存在是柏拉图实体存在的证明。

对第一个问题,哥德尔有一些论证,至少对自然数的直觉是较少有争议的,而这种直觉不但是数学中确实有的,还是哥德尔进一步扩大他的数学概念实在论直到古典分析的基础。

第二个问题,即对存在具有不可消去性的数学直觉和内容的论证。在这方面,哥德尔的论证是最强有力的。《理性的生命》的作者在细致研究的基础上,总结了哥德尔的论证。(见《理性的生命》第5章)其实,哥德尔的论证在此处实质性地使用了他的不完全性定理(特别是他的第二定理),指出约定论本身的困难。比如在对卡尔纳普等人的批评中,哥德尔论证纯约定推不出经验命题,具有可用的经验内容的系统需要一致性证明。而按哥德尔定理,对足够复杂的形式化系统,在系统内部不能证明自身的一致性,其一致性证明最终需要引用抽象概念和超穷方法。因此,总有一个纯粹语法系统所不能捕捉到的数学直觉或内容。它们必然超出任何特殊约定所能决定的范围。

第三个问题,就是说明有关数学概念特别是具有超穷性质的数学概念的直觉不是部分非柏拉图主义者也承认的那些直觉。直觉可以有多种解释,其解释关系到我们把什么想作直觉的根据或说基础。有一种是经验的直觉,是人类日常经验的某种心理学结果。承认自然数是此种直觉的产物,本身可以是一种非柏拉图主义的观点。另一种也可能是康德说的那种直觉或直观。算术和几何虽被认为有赖于此种直觉,但显然那种直觉并不能保证柏拉图式概念实体的存在。数学哲学中的直觉主义者所说的直觉,与康德的学说有某种联系,比如布劳维尔的“the intuition of two-oneness”。布劳维尔所依靠的这种直觉被他看作构造自然数的基础,可这种直觉也与柏拉图实体沾不上边。正如海丁所言:“mathematics is a production of the human mind”(Heyting, p. 52)。

如此看来,并非哲学家或做哲学时的数学家与逻辑学家们所提到的所有“直觉”都是存在柏拉图实体的证明;或者,根本没有任何直觉可以是柏拉图式实体存在的证明。因为,可能哥德尔所依赖的直觉实际上就是,或可化归为非柏拉图主义者所说的那些直觉。如果要证明确实有某类特殊的直觉依赖于柏拉图实体的存在(我们简称它为“P直觉”),柏拉图主义者至少必须在两个方面努力工作:第一,论证承认数学中直觉存在的非柏拉图主义者们怎样没有正确地解释这些直觉;第二,说明某些直觉决不是我们心灵本身的产物。

对第一项工作,为论证目的我们可以作一个简化,假设可能的直觉形式只有有限种,其中包括哥德尔所说的那种直觉。哥德尔和其他柏拉图主义者只需证明,其他直觉实际上都不足以达到真正意义上的对数学概念的直觉,特别是对具有超穷性质的数学概念的直觉,只是相信者们以为可以达到;或者,证明其他直觉实际上就是哥德尔所说的直觉,只是相信者没有把握这种直觉的真实性质而误读了它。这样最后剩下的就可能是哥德尔所说的那种直觉。不过这是一项很艰巨的任务,哥德尔在这方面没给出明确的论证。现

在我们进一步假设，哥德尔已完成了他的第一项任务，即批判清理的工作，唯一剩下的为数学所不可缺少、且真正具有独立性的直觉就是哥德尔所说的直觉。我们现在需要证明，这种直觉就是P直觉。

于是开始了对第四个问题的回答。我们已经知道，P直觉作为一种能证明柏拉图实体存在的直觉，它的核心性质就是它不来自于我们心灵本身，而来自于不依赖于我们心灵的东西。不能化归为已分析的那些直觉，只证明了剩下的这种直觉的独立性，但并不等于它就是不依赖于我们心灵的直觉，除非我们先已假定依赖于心灵的直觉都是可以相互化归的。这意味着哥德尔还必须提供一个直接的证明，来说明剩下的确是不依赖于心灵的直觉（这里我们忽略有关自然界的直觉可能也不依赖于心灵这一事实）。

无疑，哥德尔定理本身并不能证明有不由心灵自身产生的直觉，除非你规定心灵自身产生的就等价于图灵可计算的。哥德尔的证明主要表现在对“数学不仅仅是我们的创造”这个论题的直接论证中，而这个论证中他使用了不完全性的结果。根据《理性的生命》的总结，我们看到，经过一系列论证，哥德尔为此提供的最后辩护主要是以下三点：（1）如果数学是我们的创造，我们就应当了解创造之物的所有特性，而显然目前我们对数学还相当无知。（2）如果数学是我们的创造，我们将基于某种材料创造，原始材料对创造者将是客观的东西，这迫使我们接受实在论。（3）数学中有一些必然的性质和关系，限制了我们的数学结果。（参见《理性的生命》，第146页）

第一条颇有点含糊，我没有搞清“了解创造之物的所有特性”是什么意思，它的要求到底有多强。但至少一般地讲，创造者必对创造之物有完全的知识这一结论，本身需要论证；这并非是一个自明的命题。哥德尔为此所作的辩护与第二条有关。（“Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications”，见Gödel,p.312）而第二条也不是自明的，需要有形而上学假定，而非直接可以使用的论证前提。第三条受到勒文海姆-司寇伦定理的某种解释的挑战，以及科恩对康托尔连续统假设独立性证明的挑战。（《理性的生命》一书中有细致的讨论）如何应对这些挑战还是个可以讨论的问题。

假定上述三个问题都得到很好的回答，且哥德尔式直觉的存在性和必要性得到确认，则剩下的直觉就是P直觉，于是可证明柏拉图实体存在。因P直觉与柏拉图概念实体的关系如下：P直觉存在，仅当柏拉图式实体存在。

看来，如果已提到的问题能有一个合适的解决，哥德尔便能在一定程度上达到对柏拉图数学实体存在的证明。但证明还不是最终的，循哥德尔足迹前行的数学柏拉图主义者确实还有很长的路要走。我们说“一定程度上”，是因为我们在论证时还作了一些很重要的简化，比如我们未考虑在纯粹方法论意义上承认类、甚至承认更“抽象”实体的那些观点。像卡尔纳普等人可以假设性质等抽象实体，而不承认自己引入了相应的形而上学（自然也不需要可支持形而上学的直觉，虽然这里的不需要与弗雷格的不需要根据不同）。由此明显看出，既承认抽象实体，又承认对抽象实体的直觉这个立场，具有重要的区别作用（本文点出但没有讨论）。就哥德尔已完成的论证来说，我基本上赞同《理性的生命》的作者结论：哥德尔的几点证据对于批判语言约定论和唯名论所主张的“数学仅仅是我们的创造”等观点是强有力的，但他对柏拉图式的概念实在论本身并未给出令人信服的证明。

参考文献

- Frege,1979,Posthumous Writings,edited by H Hermes,F Kambartel and F Kaulbach,translated by P Long and R White,Basil Blackwell
- Gödel,1995,Collected Works III,edited by Solomon Feferman et al,Oxford University Press
- Heyting,Arend,1983,“The intuitionist foundations of mathematics”,in Philosophy of Mathematics(second edition),edited by P Benacerraf and H Putnam,Cambridge University Press .

（作者单位：北京大学外国哲学研究所）

责任编辑：苏晓离（《哲学研究》2003年第7期）