转载需注明出处

群论统一几何学的历史根源 *

邓明立[1] 张红梅[2]

（1.河北师范大学数学与信息科学学院；2.石家庄学院数学系，河北石家庄 050016）

摘 要：本文通过分析克莱因在几何学方面的主要贡献，分三个层次深入探讨了他用变换群统一几何学的历史根源。普吕克的工作为克莱因统一几何学做了早期准备；凯莱关于射影几何、度量几何之间关系的阐明又为克莱因统一几何学奠定了理论基础，成为用变换群统一几何学的前奏；若尔当的《置换与代数方程专论》和《关于运动群的研究报告》为克莱因提供了统一几何学的工具——变换群。克莱因高屋建瓴，从变换群的角度对各种几何学进行了分类，1872年发表了著名的《爱尔兰根纲领》，实现了几何学的统一，从根本上革新了几何学观念，导致了对几何基础的深入研究。

关键词：克莱因 射影几何 度量几何 变换群 几何学的统一

[中图分类号] *011* [文献标识码] *A* [文章编号] *1000-0763（2008）01-0000-09*

群结构是数学家最早研究的代数结构之一，是推动数学朝着统一化方向发展的一个非常重要的基本结构，群论的诞生预示了这种统一性的必然趋势。然而群的产生却是多元的——数论的、代数的和几何的，特别是，群论诞生于几何学，反过来又为相互割裂的几何学提供了统一的基础，使几何学在更高层次上实现了统一。

几何学发展到19世纪，进入了发展的黄金时期，各种几何学如雨后春笋般不断涌现，且呈现出许多崭新的特点：几何对象的扩大化，研究方法的多样性，以及研究成果的多姿多彩。可以说，19世纪几何学的发展对整个数学产生了不可忽视的影响，同时是群论诞生的三大历史根源之一。1872年，克莱因发表了所谓的爱尔兰根纲领，引起了 “群”的刻画乃至“群”定义的重大改变，推动“置换群”向“变换群”过渡，最终导致了“群”含义的扩张。从这种意义上来讲，爱尔兰根纲领是群论发展史上的一个重要里程碑，是用群论思想统一几何学的理论基础。

然而，目前关于克莱因用群的观点统一几何学的历史研究，要么只是从单一方面加以论述，如：H.Wussing[1]、J.J.Gray[2]和M.Kline[3]；要么只是对此作一简单概述，如：David E.Rowe[4]；还有的是仅对爱尔兰根纲领的历史地位及影响简单进行评价，如：Thomas Hawkins[5]、David E.Rowe[6]。总之，这些文献都没能从宏观意义上、全面而深入地给予系统研究。爱尔兰根纲领作为几何学发展史上的一个重要里程碑，它的问世、传播及其对后来数学发展的影响，都值得我们进行深入细致地探讨，因此全面而系统地研究这一课题具有重大意义。

一、克莱因在几何学方面的主要学术活动

克莱因（Felix Klein，1849—1925）是19世纪优秀的数学家、数学史家以及数学教育家。他创立了爱尔兰根纲领，研究了自守函数，还积极参与了数学教育的改革，对推动19世纪数学的发展做出了不可磨灭的贡献。

1865年，克莱因升入波昂大学，学生时期便引起了几何学家、物理学家普吕克（Julius Plücker，1801—1868）的注意。当时，普吕克正致力于撰写《基于以直线为空间元素的新空间几何学》，试图把解析几何学建立在以直线为元素的基础之上。第二年，就任命仅17岁的克莱因为自己的助手。克莱因在那儿他逐步学习了线几何学，并充实了有关射影几何学的知识，同时研读了英国数学家凯莱（Arthur Cayley，1821—1895）的有关著作，并在普吕克的指导下，顺利完成了博士论文“线坐标的一般二次方程到典则形式的变换”[7]，于1868年12月12日获得了博士学位。

1868年5月，普吕克突然去世。从此，《基于以直线为空间元素的新空间几何学》(第二卷) 出版的艰巨任务落到克莱因和克雷布什（Rudolf Friedrich Alfred Clebsch，1833—1872）的肩上，克莱因当时虽然还不到20岁，但已经享有线几何学权威的声望，而克雷布什的研究方向正是方兴未艾的不变量理论和代数曲面论。1869年初，克莱因来到哥丁根，加入了克雷布什的研究队伍。与克

雷布什一起对《基于以直线为空间元素的新空间几何学》的第二卷内容进行了必要补充，并从后者那里学到了不变量理论和光学，这对他后来关于不变性的观念产生了重要影响。从那时起，克莱因献身于数学事业的热情愈加高涨，而他原打算成为一名物理学家的愿望早已抛之九霄云外。

克莱因一心想开阔自己的视野，显然他对哥丁根优越的研究条件并未感到满足。1869年冬，克莱因于是来到柏林，结识了S.李（Marius Sophus Lie，1842-1899）和史托尔茨（Otto Stolz，1842－1905），并同他们建立了深厚的友谊。克莱因在柏林获得了丰厚的回报，他有幸第一次从史托尔茨那里了解到非欧几何学，并与S.李一起活跃于库默尔（Ernst Eduard Kummer，1810－1893）和维尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815－1897）的数学讨论班。这些学术活动使克莱因逐渐认识到这样一个重要事实：非欧几何学和凯莱的一般射影度量之间的联系极其紧密。于是在1870年3月中旬，他做了有关凯莱的射影度量的报告，并指出了它与非欧几何学的密切关系。值得注意的是，克莱因在哥丁根和柏林时研究的主要对象是几何学和不变量理论。

1870年4月，克莱因又与S.李一起来到巴黎，同法国数学家若尔当（Camille Jordan，1838－1921）和达布(Jean Gaston Darboux，1842－1917)建立了深厚友谊，这对他们后来的学术生涯影响巨大。1870年，若尔当发表了专著《置换与代数方程专论》，首次对伽罗瓦理论进行了系统介绍，这使数学家们发现群论不仅仅对代数方程有用，而且对整个数学特别是不变量理论及几何学的影响也很大。从此，群论开阔了他们的思想和眼界，尤其对克莱因的影响更是立竿见影。在与达布的密切交往中，克莱因了解到了法国几何学派的最新结果。巴黎之行虽然短暂，克莱因却大大充实了统一几何学的知识，他打算给每种具体的几何学一个合适的定位。

1871年夏天，克莱因通过与史托尔茨的多次讨论，逐渐明确了非欧几何学是射影几何学的一部分。同年8月他发表了《关于所谓非欧几何学第一文》，对非欧几何学作了统一性研究，把凯莱的射影度量和空间概念拓展为一般形式，将欧氏几何、非欧几何在椭圆的、双曲线的、抛物线的几何学名目下统一了起来。从1871年初到1872年9月底，克莱因又试图在不变量理论的基础上对几何学进行分类，通过与克雷布什的每天讨论、与S.李的频繁通信、以及与史托尔茨的不断联系，克莱因统一几何学的思想逐渐形成。[1] 1872年10月，克莱因发表了《关于新近几何学研究的比较考察》，这就是著名的《爱尔兰根纲领》。《爱尔兰根纲领》是几何学史上一篇划时代的文献，也是克莱因登峰造极的成就。这个纲领揭示了一个崭新的、统一的观点——每种几何学都以某个群为基础，其任务就在于确定这个群的不变量。从此，几何学也摆脱了欧氏几何一统天下的局面，获得了空前解放。

二、克莱因用群的观点统一几何学的思想渊源

2.1 普吕克的工作对克莱因的早期影响

普吕克是用代数方法研究几何学的一位代表人物，对几何学的发展做出了重要贡献。1829年，他发表了关于“三角形”坐标和“四面体”坐标的论文，并在《解析几何的发展》中介绍了平面和空间中点的齐次射影坐标，解析的方法使无穷远元素和虚元素的计算变得容易起来，这自然导致普吕克引入了平面内的线坐标——直线的坐标。即，如果线的方程形如 ，那么三元数组（u_1,u_2,u_3）就是这条线的线坐标（或切线坐标）。普吕克把上面这个方程作为动点（x_1,x_2,x_3）位于一条固定直线（u_1,u_2,u_3）上的条件，或作为变动的线（u_1,u_2,u_3）通过固定点（x_1,x_2,x_3）的条件，于是从表达式 的对称中论证了对偶原理的正确性。普吕克成功地揭开了对偶原理的神秘面纱，并阐明了它的数学本质，即在平面几何学中，点和线是等价的初始元素，而对于空间几何学，点和平面成为等价的初始元素。显然这是把空间中除点之外的几何图形看作基本元素，是几何学研究中的一种全新思想。这归功于普吕克，他是实现这一思想的第一人，从而创立了线坐标和面坐标，迈开走向线几何学的第一步。

1846年，普吕克发表了《空间几何学的体系》，标志着线几何学的真正诞生。1868年，《基于以直线为空间元素的新空间几何学》第一卷出版发表，其中系统介绍了线几何学的方法；次年，第二卷出版，克莱因对此进行了编辑。普吕克从代数方法入手，为射影几何学与不变量理论之间的联系打好了基础，这启发克莱因利用变换群的观点来认识几何学，同时也为射影几何学向高维推广提供了强有力的工具。[8]与此同时，克莱因通过与物理学家的密切接触，也为自己用变换群统一几何学奠定了坚实的理论基础。

2.2 凯莱的不变性思想对克莱因的直接影响

到19世纪中叶，各种几何学之间的内部关系问题仍然没有解决，几何关系的研究成为研究的热点。第一个统一研究几何学的工具是不变量理论，它揭示了度量几何和射影几何之间的深层关系。

凯莱的几何学目标远远超越了布尔（George Boole，1815－1864），他把几何学的分类作为奋斗的目标之一。布尔在《关于解析变换的理论的研究》中指出了“平凡的”不变性思想的缺陷，提出了更为一般性的问题——寻找二元型系数的一般表达式。凯莱自1854年起，接连发表了十篇有关代数齐式的论文。他在《关于代数齐式的第一篇论文》[9]开篇就将代数齐式定义为一个齐次的形式，其余九篇论文题目以序号不同区别开来，其中最著名的是发表于1859年的《关于代数齐式的第六篇论文》，文章对几何基础进行了阐明——具体说是在不变量理论的基础上对射影几何和欧氏几何关系的一个阐明。[10]凯莱认为一般的射影关系决定几何图形的度量性质。也就是说，射影关系更为基本，欧几里得度量几何只不过是射影几何的一部分，是其特例。

1870年至1871年间，克莱因着手研究与所有类型的二次曲线、二次曲面有关的度量，发现了平面的、立体的双曲几何学以及椭圆几何学，他已经意识到了几何学朝着不同方向发展的趋势。克莱因从克雷布什那里学习了不变量理论以后，有了统一几何学的大体想法与思路。1871年，他发表《关于所谓非欧几何学第二文》，采纳并推广了凯莱的思想，建立了非欧几何与射影几何之间的联系，使在射影几何的框架内也能研究非欧几何。他写道：

“有必要从直觉上弄清楚导致三种几何学的抽象假设，这促使我去寻找一些可以看作是这些几何学所表示的度量的例子，它们会使三种几何学之间的无矛盾性变得一目了然。” [11]

“我想构造出三种几何学的平面表示和空间表示，它们会完整地概括出三种几何学的主要特征。我打算用这种方法来证明：这些表示不只是对正在讨论的这些几何学的阐释，它们也解释了其内在的本质。…” [11]

然而总体上，克莱因的观点与凯莱的并不相同。凯莱是为了证明度量（欧氏）几何学为什么可以看作是射影几何学的特殊情形，只

是详细研究了平面，给出了构造一个相对于给定的圆锥曲线为“绝对形”的平面度量的过程。克莱因则使用了更加几何化的方法，把凯莱的绝对形（二次曲面）的性质具体化，将广义的凯莱度量推广至空间，使研究建立在射影几何里最基本概念（交比）的基础之上。进一步，克莱因解释了可能出现的三种情形：

1. 若充当绝对形的基本曲面是虚曲面，得到的是狭义的黎曼非欧几何；

2. 若充当绝对形的基本曲面是实椭球面，或实椭球抛物面，或实双叶双曲面，便得到罗巴切夫斯基非欧几何；

3. （过渡情形）若充当绝对形的基本曲面退化成一条虚曲线——球面虚圆，便得到通常的欧几里得几何。

1872年，克莱因将统一几何学的思想明确地写于他的《爱尔兰根纲领》：

“几何学只是研究空间形式相对于一条已知的固定圆锥曲线(无穷远虚圆)的射影性质。”[11]

欧几里得几何、罗巴切夫斯基非欧几何以及狭义的黎曼非欧几何等度量几何都统一于射影几何而成为射影几何的特例。克莱因还重新命名了上述几种几何学，他称罗巴切夫斯基几何为双曲几何，正的常曲率曲面上的黎曼几何叫做椭圆几何，而欧几里得几何称为是抛物几何，这也同样体现了他追求几何理论统一性的思想。

2.3 若尔当的几何运动群对克莱因的启示

18世纪末工业革命之后，科学研究转向了寻求数学和自然科学（尤其是物理学）之间的新联系。早期代表有黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826—1866）和亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz，1821—1894）等人，他们有意让坐标变换充当现实的物理运动所反映的数学角色，催生了一门新兴的几何学研究领域，即通过对运动的刻画来研究物理空间的几何学。亥姆霍兹强调这种发展绝非偶然，而是有前兆的，他公然宣称要把整个物理学“降为”机械学，即质点机械学，这种研究思路由于若尔当和克莱因的工作而得到了延续和发展——运动几何学观念下的研究应当是运动群的研究，从而直接推动了“置换群”向“变换群”的过渡。

1868年，黎曼的《论作为几何基础的假设》引起了学术界的关注。亥姆霍兹曾就空间问题和几何学问题发表了几篇论文，与黎曼上述思想联系最为紧密的是《论作为几何学基础的事实》，也是亥姆霍兹最著名的篇章之一。这篇论文连同他发表于1866年的《论几何学的基础》[12]，都尝试从公理化角度给几何学进行定义。他的基本假设是：几何学是客观空间的结构，可以用现实世界中物体的运动加以描述并定义。这种用运动来理解客观空间的几何学的观点，直接导向了群的思想，为变换群概念的表述开辟了道路。1866年至1872年间，克莱因和S.李通过共同努力，使变换群概念获得了比较准确的表述。从历史上来讲，接下来的研究是对已经扩充的“变换群”概念的区分；相应地从逻辑上来看，便是对这样的群进行分类。

若尔当受物理学家和矿物学家布拉维（Auguste Bravais，1811－1863）的影响，后者为确定晶体结构而研究了运动群[3]，前者随即开始了对无限群的第一个重要研究。若尔当发表《关于运动群的研究报告》[13]（1868－1869），对运动群进行了大规模的分类，开创了在群的标题下研究几何变换的先河。他使用群概念研究刚体的实际运动，这种运动由平移和旋转的合成来实现，遗憾的是，他忽略了反射、形变和刚体中不能机械实现的坐标变换。若尔当宣称：空间中立体的每个运动都可以看作一个扭转，并且在下述条件下可以完全确定：1.扭转的轴A的空间位置；2.关于A的旋转角度；3.沿A的位移量。他用类似 的符号来表示这样一个扭转，两个相继进行的运动 和 合成的结果是另一个运动 。若尔当真正目的并不是确定这样两个运动的合成，而是运用群论进行推理论证，他更关心的是由 、 、 …生成的运动群，而合成意义下的封闭性为此提供了可能。

若尔当运用群论术语表述了自己的问题。他说：“起点的运动”的变化会导致无限多个运动群产生。但是，“我们将证明所有这些群都可以由有限个不同类型的群构成”，实际上他的思想就是后来群的生成子的问题。然而，他用“起点的运动”表述了“生成子”的概念，却没有构造运动群的生成子系。

若尔当关于几何运动群的引进以及对其生成子问题的介绍，极大地启发了克莱因，这使后者在研究正多面体的等距群方面取得了重大进展，这种进展不仅使克莱因把置换论的基本原理应用于几何学，而且使他得出（离散）变换群的概念。克莱因承认并努力阐明这个概念，从而将几何学、代数和函数论结合在一起，导致了意义深远的发展，逐步完成了几何学的分类。

三、爱尔兰根纲领思想渐趋明朗及其影响

1872年10月，克莱因已经得到了几何学的分类，其主要思想通过以下6篇文章来实现[11]：

A.《关于某些曲线族和曲面族的两个注记》（克莱因和S.李），写于1870年6月13日；

B.《关于由单重无穷多可交换线性变换变为自身的封闭系统所表示的平面曲线》（克莱因和S.李），写于1871年3月；

C.《关于所谓非欧几何学第一文》（克莱因），写于1871年8月19日；

D.《关于线几何和度量几何》（克莱因），写于1871年10月；

E.《关于所谓非欧几何学第二文》（克莱因），写于1872年6月8日；

F.《关于新近几何学研究的比较考察》（克莱因），写于1872年10月。

论文A中没有提到群的概念。如果不考虑容许变换集的封闭性问题，则涉及不到群的思想，但A却包含了一种间接的群论问题，即

寻找线性变换下保持不变的曲线和曲面：

“我们将要考虑在无穷多个线性变换下保持不变的曲线。总的来说，这些变换将可能把曲线上的每个点映成该曲线上其它任意一个点。”[11]

关于平面曲线的论述方面，论文B又对论文A的内容进行了更为详尽的阐述。论文B的目标是要找出那些在封闭的、单重无穷多可交换的变换集合下保持不变的平面曲线，这实际上是要确定平面内的“封闭的变换的集合”，若注意到它与置换论和代数方程论中所进行的研究密切相关，则就涉及到群论的方法了。其§1的标题是“关于单重无穷多可交换线性变换的封闭系统”，“封闭”这一概念在这里叙述得更加准确、严密。特别地，文章还指出存在五类容许变换，每一类都依赖于一个连续变化的参数，且变换是封闭的，原文中论述如下：

“交换任意两个变换的位置，所得的新变换相同；并且这个新变换本身也是这个系统的一个变换。鉴于第一个性质，我们称系统的变换是可交换的。鉴于第二个性质，我们称这个系统是封闭的。”[11]与这种“封闭的变换系统”相对应的就是“置换群”。

对于论文C和D，这两篇文章本质上研究了几何学的不变量理论的分类方式，并没有把群的概念置于头等重要的地位。

在论文E的§1里，克莱因更准确地定义了n维流形的概念，他指出流形由所有的n元复数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$（称为元素）构成。在§2里，他把流形的变换定义为每个元素到相伴元素的变换。克莱因在本节中明确陈述了如下事实：

“与变换对应的方程是可逆的，而且可逆的方程表示可逆的变换。如果我们用诸如A、B……这样的字母来表示变换，用AB表示A和B的合成，A-1表示A的逆…现在，设存在一个已知的变换序列A、B、C……，如果这个序列满足任意两个变换的合成仍是该序列中的一个变换这条性质，则称这个序列是一个变换群……”[11]

克莱因最初称“变换群”为“封闭的变换系统”，并强调这源于置换理论。抽象地来看，克莱因对群的定义与若尔当在《置换与代数方程专论》中给出的群概念完全等价，且二人都假定了集合关于运算的封闭性。如果我们暂且不考虑结合律和单位元的存在性，则可以得知：闭包公理对有限群成立，但对无限群就不成立了。从这种意义上来讲，若尔当在《置换与代数方程专论》中使用的“群”适合他的研究对象；但在克莱因讨论的情形里，定义就不满足要求了，因为他只是隐含地使用了“群”中的逆变换，并没有在群的定义中作明确规定。到1871年夏，克莱因已经接受了置换理论中的群概念，他还将“两个相似的群”解释为“通过一个变换C，从另一个群里产生出的群”，这与若尔当关于“两个同构的群”本质是一样的。§3中介绍了“主群”这一新概念，§4题目是“用相伴的变换群刻画不同的几何方法”，这两节充分论述了克莱因关于几何学的主要思想。克莱因从这样的事实出发，即群（没有出现“子群”这个术语）越大，空间的几何对象所保持的性质就越少。此外，他还认为任何一个几何变换群都包括主群。

在论文F里，克莱因把“几何方法”（methods of geometry）换成了“几何学”(geometries)，同时指出：对于每种“几何学”，都存在着一个“相伴的”、具体的变换群，“群”概念被证明是对几何学分类的有力工具。

从内容上来讲，论文F和E没什么两样，只不过论文F对“空间”和“流形”之间的区别比论文E描述得更清楚些，流形的变换与空间的变换类似，它们也构成群。这样，作为几何的推广便有下列一般性问题：“给了一个流形和这个流形的一个变换群，以在这个变换群的变换之下其性质保持不变的观点研究这个流形的实体。”[14]

随后，克莱因便用不变量理论的术语重新表述了这个原理。他认为有必要建立“在变换群下任意确定对象的性质不会改变的理论”。于是，他使用这个过渡时期特有的混杂术语，将上述问题陈述如下：

“给了一个流形和这个流形的一个变换群，建立关于这个群的不变性理论。”[14]

论文F的后面部分里，克莱因用上述方法分析了射影几何、线几何、反演几何以及S.李的球面几何的逻辑地位，同时也给出了与不变量理论的思想之间的联系，并指出：如果以圆锥曲线为基础，则二元型的理论与平面射影几何的理论等价。

爱尔兰根纲领的思想方法引领了几何学家的研究方向，对几何学的发展产生了深刻影响。虽然并非所有几何学都可以纳入克莱因对几何学分类的框架，但这种观点至今对几何学仍有影响，特别是强调变换下的不变性，对于力学及物理学思想的推动，远远超出了数学的范围。

克莱因对几何学统一性的孜孜追求，同时也深深影响了整个数学的发展。伟大的德国数学家希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）在20世纪初发起了公理化运动，提出以“公理系统”作为统一各门数学学科的基础；20世纪30年代，美国数学家伯克霍夫（Garrett Birkhoff，1911—1996）提出用“格”来统一代数系统的理论；其后，法国的布尔巴基学派继承公理化运动，提出“数学结构”的思想，把数学的核心部分统一在结构概念之下，使之成为一个有机的整体。

总之，数学科学是一个不可分割的整体，其生命力就在于各个部分之间的联系，群论就是体现这一特征的典型代表。群最初源于代数方程的求解问题，最终数学家们以群为研究工具，明确回答了有关方程的可解性问题。但尤为重要的是，群论开辟了全新的数学领域——结构数学，对近代数学的形成和发展产生了极其重要的影响，成为蓬勃发展的数学科学的主流。到十九世纪末，群的概念已经深入到数论、代数、几何及分析等各个领域，逐步进入了数学的中心，大有统一数学的趋势。几何学的群论原则就是群在几何学中的成功应用，几何学由此也在更高的层次上实现了统一。

[参 考 文 献]

[1] Hans Wussing. The genesis of the abstract group concept：a contribution to the history of the origin of abstract group theory, Cambridge, Mass：MIT Press, 1984. 167-177.

[2] J.J.Gray. Poincare and klein－Groups and Geometries. 1830—1930：A Century of Geometry：Epistemology，History and Mathematics, Berlin-New York：Springer-Verlag, 1992. 35-43.

[3] M.Kline. Mathematical thought from ancient to modern times , New York , Oxford University Press, 1972（中译本：M.克莱因，《古今数学思想》，上海科学技术出版社，2003）.