

# 教学用的数学知识研究回顾及启示

董涛

(福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350108)

**摘要:** 教学用的数学知识研究经历了数学知识研究、数学课程知识研究和教学用的数学知识研究三个阶段。教学用的数学知识通过对数学教学的核心活动进行分析, 直接研究课堂教学中教师使用的数学知识及其影响。它是有效教学的知识基础, 应该成为教师教育的主要内容。

**关键词:** 数学; 教学; 知识; 教师教育

**中图分类号:** G632.4    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1008 - 0627 (2009) 05 - 0149 - 04

## 一、数学知识研究

传统上认为数学教师至少要掌握他所教的数学知识。班级授课制成熟后, 人们开始同意这样一个原则: 除了所教的数学知识以外, 数学教师还需要掌握像组织教学、控制课堂秩序等一些教学知识。随着教学研究的深入, 人们发现教师仅仅知道他所教的数学的术语、概念、命题、法则等知识是不够的。<sup>[1]</sup>除此之外, 教师还要知道数学的学科结构。学科结构的概念最早源于 Schwab。他指出了理解学科结构的两种方式: 一个方式是句法性地 (syntactically), 另一个方式是实体性地 (substantively)。<sup>[2][240]</sup>所谓句法性地是指从学科所表现出来的逻辑结构方面去了解学科结构。比如, 引入无理数表示不可公度线段, 引入负数与复数表示某些方程的解。前者可以看到, 后者看不到, 仅是为了保持方程都有解这个论断的完整性和通用性所做出的一种假设与解释。对这三个概念含义的理解, 只能通过产生这些概念的前后联系才能揭示。所谓实体性地是指从学科的概念设计角度去了解学科结构。比如, 欧氏几何与解析几何有不同的概念框架。Ball 把数学的学科结构知识称为关于数学的知识。<sup>[3]</sup>它是指知识从哪里来, 又是如何发展的, 真理是如何确认的, 又将用到哪里去。主要有三个维度: 一是约定与逻辑建构的区别。正数在数轴的右边或者我们使用十进制值制都是任意的、约定的。而 0 做除数没有定义或者任意一个数的零次幂都等于 1 就不是任意的、约定的; 二是数学内部之间的联系以及数学与其他领域之间的联系; 三是了解数学领域中的基本活动: 寻找模式、提出猜想、证明断言、证实解法和寻求一般化。

对数学知识的研究, 拓宽了人们对教学用的数学知识的理解。它显示教学用的数学知识是很复杂的, 除了术语、概念、法则、程序之外, 还有数学学科结构或者关于数学的知识。这些知识对于教师确定为什么教、选择教什么和怎么教都会产生影响。比如, 约定的与逻辑建构的概念的教学策略会有很大的不同, 逻辑建构的概念就必须讲清楚它怎么来的, 为什么要定义这个概念, 怎样定义, 它会有什么用, 它与其他的关系是怎样的, 它的应用有哪些限度。而约定的概念就没有这些必要。但是, 有效地数学教学, 仅仅具有上述知识还不够。它缺少对学生的考虑, 不能给教师提供教授一群特定的学生所必须的教学上的理解。<sup>[4][448]</sup>

比如, 仅仅通过推导知道  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  对有效教学是不够的, 教师还需要知道一些学生容易把分配律过度推广而记成  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ , 知道用矩形的面积表征可以有效地消除这一误解。学生误解的知识与消除误解的教学策略显然不能纳入数学知识的框架, 教学用的数学知识的复杂性要求更精致的框架来描述。

收稿日期: 2009-08-15

作者简介: 董涛 (1972-), 男, 山东淄博人, 福建师范大学数学与计算机科学学院讲师, 教育学博士。

## 二、教材分析研究

有效的教学必须考虑学生已有的知识和知识呈现的最佳序列。在数学学科中, 马力平的知识包 (Knowledge package) 是国际上较为典型的此类研究。知识包是围绕着一个中心概念而组织起来的一系列相关概念, 是在学生的头脑里培育这样一个领域的纵向过程。<sup>[5](113)</sup>知识包含有三种主要成分: 中心概念、概念序列和概念结点, 也包括概念的表征、意义和建立在这些概念之上的算法。下例是 20 以内数的加减法的知识包 (图 1)。在这个知识包内, 中心概念是 20 至 100 数的“借位减法”, 它是学习多位数的加减的关键前提。

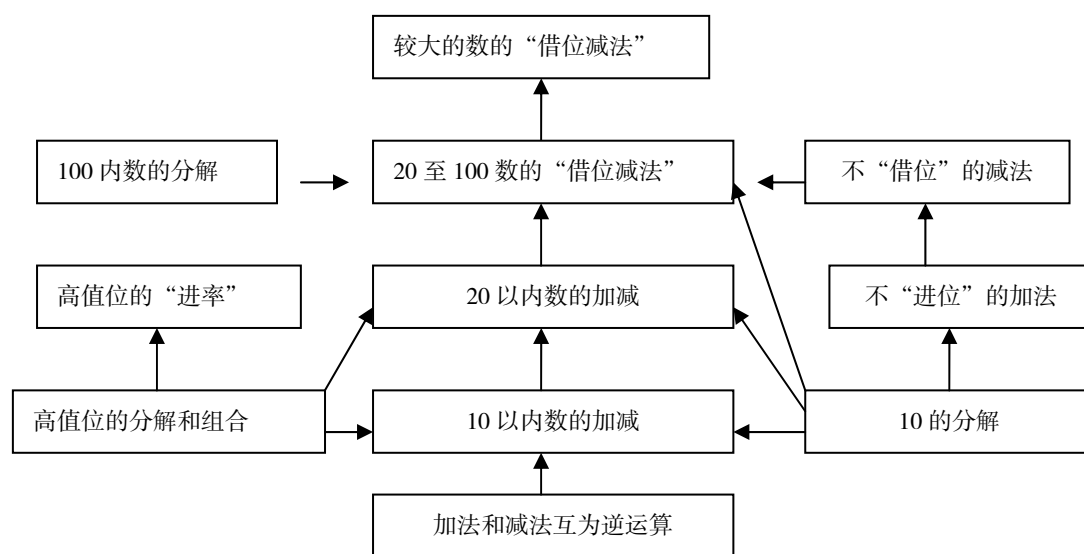


图 1 马力平的 20 以内数的加减法知识包

马力平的知识包实际上是我国内地传统的教材分析研究。这类研究结果是教学参考书的主要内容之一。它是一种课程知识, 是教师对课程的分析, 比对数学知识的分析更接近教学用的数学。但它也不是教师教学时使用的数学知识。它最多是教师对教学的考虑, 没有考虑师生互动时产生的数学需求。教师在教学时, 能够动员起来的知识不一定符合教学情境的需要。<sup>[4](449)</sup>比如教师预期的一种学生的反应在与学生的互动中没有出现, 教师以学生的这种反应为跳板的后继知识就没有了用武之地。马力平概括出的知识包, 与教师在课堂教学时使用的数学知识还有一段距离, 教师在教学时可能用得上, 也可能用不上。教师在教学时所需要的数学知识远远超出教材分析所能提供的内容。

## 三、教学用的数学知识研究

Ball 开创了教学用的数学知识研究。她通过分析数学教学的核心活动, 直接研究课堂教学中教师使用的数学知识及其影响。下面以 Ball 的一个课例来说明其研究方法与结果。该课内容是三年级多位数减法: Joshua 星期一吃了 16 粒豌豆, 星期二吃了 32 粒豌豆。问 Joshua 星期二比星期一多吃了多少粒豌豆? 学生在解题过程中提供了六种解法。Sean 从 16 的后继数 17 开始向后数数, 一直数到 32 得到答案。Riba 认为, 32 的一半是 16, 答案就是 16。Betsy 把表示 16 和 32 的教具 (豆子) 一一配对, 数一下表示 32 的教具中剩余的没有配对的豆子得到答案。Mei 的方法是直接从表示 32 的豆子中拿走 16 粒, 数一下剩余的就行了。Cassandia 提供了标准的减法算法, Sean 受到启发, 提供了另一种解法:  $16+16=32$ , 整节课, 学生想尽办法鉴定这些解法的异同。<sup>[6]</sup>Ball 认为, 这节课教学的核心活动是处理数学知识的关联和控制课堂讨论。知识的关联涉及到在具体和符号的模式中, 减法和加法是如何关联的、减法的“比较”和“拿走”的解释是如何关联的、教具的表征如何转化为符号表征、Betsy 的配对比较法如何转化为 Sean 的向后数数的方法、Betsy 的方法如何和 Mei 的方

法协调，控制课堂讨论首先表现在提供线索和解释，推动正确的方法的发展；其次表现在搁置有问题的方法，比如搁置 Riba 的说法。Riba 的论断是正确的，但要使其他的学生能够明白他的意思，还需要添加几步推理。但这几步推理与用它来证明 Sean 的结论超过了三年级学生的理解能力。

Ball 对这节课教师需要使用的数学知识进行了归纳。除了传统的教材分析提供的借位减法的符号算法及其背后的位值制之外，教师还需要其他知识。首先需要知道问题的两种表征模式（如减法  $32-16=?$  与缺失加数的加法  $16+?=32$ ）是等价的。其次，还要知道此问题的一些表征：比如像 Sean 的从 17 数到 32，或者 Mei 的从 32 里拿走 16 个等等。第三，教师还需要具有深刻的数学眼光去审查、分析和协调学生的多种解法。最后，教师还需要一些关于数学论证的知识。通过上述分析，Ball 指出，教材分析只能提供教学用的数学知识的一部分，其余大部分只能在分析数学教学的核心活动中才能得到。

#### 四、启示

1. 教学用的数学知识是有效教学的知识基础。它与数学家的数学知识、教材分析得出的数学知识是不一样的。它具有一种教学上有用的数学理解，这种理解主要集中于学生的观念和误解上。学生对特定内容的理解是有差异的，教师需要调和学生不同的理解方式并在这些方式之间灵活自如地转换，引导学生把知识进一步组织，促进学生在已有的知识基础上有效学习。

2. 教学用的数学知识是高观点下的数学知识，它联系着更深刻的概念和方法。Ball 的课例仅是小学三年级的两位数退位减法，但是，通过对课堂教学核心数学活动的分析显示，隐藏在退位减法之外的，是高等数学的等价、同构、相似性和表征之间的转化等概念。从结构上说，前五种解法是同构的，前五种解法和最后一种缺失加数的加法是等价的。但前四种解法的解释模型是不同的，有三种是“拿走”模型，一种是“比较”模型。只有从数学结构上理清这些解法的关系，才能有效地引导学生在不同的方法之间转换并分清这些方法的异同，促进学生高效地组织自己的数学知识。香港的“课堂学习研究”也证实，数学专家参与的教研活动，能提升课堂教学的有效性。<sup>[7]</sup>

3. 教学用的数学知识存在一定的结构。首先是学生理解的知识。像 Ball 的课例所展示的，学生对退位减法的理解有不同的方式、不同的层次和一些误解，这些知识是教师教学的起点。以学生已有的知识为起点自下而上的讲授使知识加以扩充，把新知识与学生已经构成内在网络的概念和方法联系起来，这是提高教学效率的奥妙；其次是教学策略。像 Ball 的课例所展示的，学生的理解各种各样，需要教师使用相应的策略来控制课堂讨论，协调不同的方法，促进正确的方法发展，搁置有问题的方法，这是提高课堂教学效率的重要手段；第三、控制与反馈的知识。教师需要提供线索和解释，矫正学生的误解，促进学生自我评价的参与，促进学生进一步精简合理化知识；第四，课程知识。像马力平的知识包概念所揭示的，特定课题呈现的最佳序列，它的来龙去脉及与其它学科的横向联系，是教师用来教学的数学知识基础。顾泠沅的研究也揭示，辨明一门学科各知识点的固着关系及其潜在距离，构建适合学生特点的、具有合适梯度的结构序列，是提高教学效率的基础；<sup>[8] (165)</sup>最后是教学目的统领性观念。像退位减法，是像 Ball 那样对学生的经验进行精简合理化还是直接教授退位减法的法则，取决于教师对数学的理解、信念、数学的认识论以及对特定学生最有价值的数学知识的判断。<sup>[9] (220)</sup>当然，这些成分是从不同的维度来说明教学用的数学知识的属性，它们之间的关系及提高课题教学效率的机制还需从课堂教学的经验出发进一步的概念化。

4. 获取这种教学用的数学知识的方法是对数学课堂教学的核心活动进行分析。这些活动包括鉴定学生已经知道了什么；选择和管理所教数学概念的表征；评价、选择和修改教科书；在各种教学策略中做出决策；找到支持这种决策所需的资源；控制学生的讨论。<sup>[4] (453)</sup>数学课堂教学的核心活动框架可以更有针对性地分析数学课堂。可以透过表象抓住本质，沉淀下教学用的数学知识库，为教师教育提供内容，为教师专业发展提供支持。教师采用 Ball 的方法来分析自己的课堂，能够忽略枝节，抓住要害，逐步提高自己的教学分析技能。

5. 教师教育尤其是在职培训应结合具体课例。如果 Ball 不分析自己的课堂,是不会发现在退位减法的课上,会隐藏着同构等数学概念。同构的命题有不同的解释,这些不同的解释模型学生接受上有难易之分,在教学策略上有很大的不同。这启示我们,在教师教育尤其是在职培训时,教师需要的是结合具体课例的指导,而不是泛泛地教育理念说教。顾泠沅先生的调查也证明了教师的这一需求。<sup>[7]</sup>需要指出的是,教学用的教学用的数学知识具有情境性、个人性的一面,并不完全是命题性的公共知识,教师在学习时也不能完全照搬,需要针对自己的特质和学生的特质,进行改造。尽管这样,教学用的数学知识体现了数学教师的专业性,是把数学教师与数学家、数学教育理论家区分出的专业知识,是数学教师专业发展的实质。教师积累和学习特定课题的、教学用的教学用的数学知识,是专业发展的主要方式。

#### 参考文献

- [ 1 ] SHULMAN L.S. Those who understand knowledge growth in teaching[J]. Educational Researcher, 1986,15(2):4-14.
- [ 2 ] SCHWAB J.J. Education and the structure of disciplines[M]// WESTBURY I, WILKOF N J. Science, curriculum, and literal education. Chicago: University of Chicago Press, 1978.
- [ 3 ] BALL D L. Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education[D]. East Lansing, Michigan: Michigan State University, 1988:44.
- [ 4 ] BALL D L, LUBIENSKI S T, MEWBORN D S. Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge[M]// Richardson V. Handbook of Research on Teaching, Washington: American Educational Research Association, 2001.
- [ 5 ] MAL. Knowing and teaching elementary mathematics[M]. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.1999.
- [ 6 ] BALL D L, BASS H. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics[M]// Boaler J, Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics. New York: Macmillan, 2000: 83-104.
- [ 7 ] 卢敏玲. “课堂学习研究”对香港教育的影响[J]. 开放教育研究, 2005(3): 84-89.
- [ 8 ] 顾泠沅. 教学行动的改革与诠释[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.
- [ 9 ] GROSSMAN L, SCHOENFELD A, LEE C. Teaching subject matter[M]// Darling L, Hammond, Bransford J. Preparing teachers for a changing world. San Francisco: Jossey-Bass, 2005.

## A Review of Math Knowledge Applied in Teaching and Its Implications

*DONG Tao*

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** Researches on Math knowledge applied in teaching have experienced three stages of math knowledge, math curriculum knowledge and math knowledge in instruction. The study of mathematic knowledge in teaching mainly concerns the math knowledge and its impact on instruction on the basis of analyzing core activities of math teaching. It is the basic knowledge of effective teaching as core content of teachers' education.

**Key words:** mathematics; teaching; knowledge; teacher education

(责任编辑 周 密)