山東農業大學學報 JOURNAL OF SHANDONG AGRICULTURAL UNIVERSITY
(自然科学版)，2008，39(3)：454-456

# 二值命题逻辑中逻辑推理的有效度

王廷明
（青岛大学，青岛 266071）

摘要：本文以公式真度概念为基础，给出了二值命题逻辑系统中公式由理论逻辑推出的有效度概念及计算方法，讨论了在基本逻辑运算下理论的有效结论问题以及同一理论的结论的相似问题。
关键词：命题公式；主范式；真度；有效度；相似度
中图分类号：O 141　　文献标识码：A　　文章编号：1000－2324（2008）03－0454－03
收稿日期：2006-07-27
作者简介：王廷明（1963-），男，副教授，主要从事经典逻辑领域的教学与研究工作。

EFFECTIVE DEGREE OF TWO-VALUED PROPOSITIONAL LOGICAL REASONING

WANG Ting-ming1
（Qingdao University,Qingdao 266071，China）

Abstract:Under the concept of truth degree formula,this paper introduces the concept of effective degree,caused by the formula deducted from logical theory,and calculation method in the two-valued propositional logic system.It discusses the issue of effective conclusion on the basis of fundamental logical operations,moreover,it discusses the similarity in the conclusion of identity theory.
Key words：Propositional formula；principal normal form；truth degree；effective degreesimilarity degree

## 1 引 言

在二值命题逻辑系统中，根据公式在各种赋值下的取值情况，可将公式分类为重言式（真度为1）、矛盾式（真度为0）和可满足式。如何描述公式的真确度，文献[1]利用势为2的均匀概率空间的无穷乘积在经典二值命题逻辑系统中引入命题公式的真度概念，从而把原来只就重言式和矛盾式给出真度的情形推广为每个公式都有真度的情形。文献[2，3]通过由公式诱导的Boole函数给出了公式的真度概念。公式的真度是公式真确度的一种数值表征，也是公式为真程度化的一个数量特征。本文以公式真度概念为基础，给出了二值命题逻辑系统中公式由理论逻辑推出的有效度概念及计算方法，讨论了在基本逻辑运算下理论的有效结论问题以及同一理论的结论的相似问题。

## 2 二值命题逻辑公式的真度和基本真度等式

设 $P_1$，$P_2$，…，$P_n$ 为n个互异的命题变元，S=｛$P_1$，$P_2$，…，$P_n$｝，F（S）表示S上的命题公式全体。设A∈F（S），令，$T_1$（A）＝｛$i_1$,$i_2$,…,$i_t$｝，$T_0$（A）＝｛$J_1$,$J_2$,…，$j_s$｝分别表示公式A的主析取范式和主合取范式中极小项和极大项的下标集合。显然$T_1$（A），$T_0$（A）为下标全集$U_n$＝｛0，1，…，$2^n$-1｝的一个划分，且对公式AB∈F(S)，有$T_1$（A∨B）＝$T_1$（A）∪$T_1$（B），$T_1$（A∧B）＝$T_1$（A）∩$T_1$（B）。以/X/表示集合X的阶。

定义2.1[2，3] 设A∈F(S)，$\bar{A}$：｛0，1｝$^n$ → ｛0，1｝是A诱导的Boole函数。令τ（A）＝$\frac{1}{2^n}$｜$\bar{A}^{-1}$（1）｜，称T（A）为A的真度。

由于{$T_1$（A）}为公式A的主析取范式中极小项的项数，也是A的成真赋值的个数，从而｜$\bar{A}^{-1}$（1）｜＝｜$T_1$（A）｜。这样我们可以给出与定义2.1等价的公式真度概念。

定义2.2 设A∈F(S)。称τ（A）＝$\frac{1}{2^n}$｜$T_1$（A）｜为A的真度。

对A∈F(S)，由0≤｜$T_1$（A）｜≤$2^n$，故0≤τ（A）≤1，同时τ（A）＝1－$\frac{1}{2^n}$｜$T_0$（A）｜。显然A是重言式当且仅当$T_1$（A）＝$U_n$，即τ（A）＝1。A是矛盾式当且仅当1，和（A）＝φ，即τ（A）＝0。进一步，关于公式在基本逻辑运算下的真度关系有下列结果。

引理2.1[1] 设A，B∈F（S）。则有下列基本真度等式：

(1) $\tau(-A)=1-\tau(A)$。

(2) $\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$。

引理2.2 设A，B∈F（S）。则

(1) $\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1=\tau(B)-\tau(A\vee B)+1$。

(2) $\tau(A\leftrightarrow B)=\tau(A\wedge\tau)-\tau(A\vee B)+1$。

证明　由$(A\to B)\vee A$是重言式，故由引理2.1得

$1=\tau((A\to B)\vee A)=\tau(A\to B)+\tau((A\to B)\wedge A)=\tau(A\to B)+\tau(A)-\tau(A\wedge B)$，

移项得$\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1$。同理可得$\tau(A\to B)=\tau(A\vee B)+1$，故（1）成立。

由$\tau(A\leftrightarrow B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau((A\vee B)\to(A\wedge B))$及（1）可得（2）成立。

定义2.3[1] 设A，B∈F(S).称$\xi(A,B)=\tau((A\to B)B\wedge(B\to A))$为A，B的相似度.设$p(A,B)=1-\xi(A,B)$，则P是F（S）上的伪距离.设$\Gamma\subset F(S)$，称$\mathrm{div}(\Gamma)=\sup\{p(A,B)1\ A,B\in D(\Gamma)\}$为理论（Γ）的发散度，其中D（Γ）为理论Γ的结论集合。

## 3　逻辑推理的有效度

设A，B∈F(S)，i=1，2，…，m.若$(A_1\wedge\dots\wedge Am)\to B$是重言式，称B是F（S）中有限理论$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}$的有效结论或B可由$\Gamma=\{A,\dots,A_m\}$逻辑推出[4]。我们利用公式的真度定义逻辑推出的有效度概念。

定义3.1 设$A_i$ B∈F(S)，i＝1，2，…，m。称公式$(A_1\wedge\dots\wedge A_m)\to B$的真度为B可由理论$\Gamma=\{A,\dots,A_m\}$逻辑推出的有效度，记为δ（Γ，B）。即$\delta(\Gamma,B)=\tau((A_1\wedge\dots\wedge A_m)\to B$。

有效度δ（Γ，B）反映了B由理论Γ逻辑推出的程度。下面讨论有效度的计算问题。

定理3.1 设$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}\subseteq F(S)$，B∈F（S）。则$\delta(\Gamma,B)=\frac{1}{2^n}|T_0(\Gamma)\cup T_1(B)|$。

证明　由$T_1(-A_1\vee\dots\vee A_m\vee))=\bigcup_{i=1}^{m}T_1(B)=\bigcup_{i=1}^{m}T_0(A_i)\cup T_1(B)$，故

$\delta(A_1,\dots,A_m;B)=\tau((A_1\wedge\dots\wedge A_m)\to B)=\tau(-A_1\vee\dots\vee-A_m\vee B)$

$=\frac{1}{2^n}|T_1(-A_1\vee\dots\vee-A_m\vee B)|=\frac{1}{2^n}|\bigcup_{i=1}^{m}T_1(-A_i))\cup T_1(-A_i))\cup T_1(B))|=\frac{1}{2^n}|T_0(A_i)\cup T_1(B)|$。

结论得证。

推论3.1 设$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}\subseteq F(S)$，B∈F（S）.则$\delta(\Gamma,B)=-\frac{1}{2^n}|T_1(\Gamma)\cap T_0(B)|$。

证明　由$\bigcup_{i=1}^{m}T_0(A_i)\cup T_1(B)=\bigcup_{i=1}^{m}[U_n-T_1(A_i)]\cup[U_n-T_0(B)]=U_n-[\bigcap_{i=1}^{m}T_1(A_i)\cap T_0(B)]$以及定义3.1可得。

定理3.2 设$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}\subseteq F(S)$，B∈F（S）。则

$$\delta(\Gamma,B)=\sum_{i=1}^{m}\delta(A_i,B)-\sum_{1\le i_1<_2\le m}\delta(A_{i1}\vee A_{i2},B)+\cdots$$

$$+(-1)^k\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\delta(A_{i1}\vee\cdots\vee A_{ik}),+\cdots+(-1)^m\delta(A_1\vee\cdots\vee A_m,B)。$$

证明　由δ（Γ，B）＝τ（（A，∧…∧$A_m$）→B）＝τ（（$A_1$→B）），应用引理2.2展开，以及对1≤$i_1$＜…＜$i_k$≤m(k=1,2,…，m)，（$A_{i1}$→B）等价于（$_{i1}$∨…∨$A_{ik}$）可得结论成立。

由定理3.2可得，δ（$A_1$，$A_2$；B）＝δ（$A_2$；B）+δ（$A_2$；B）－δ（$A_1$∨A；B）。而

δ（$A_2$；B）－δ（$A_1$∨$A_2$；B）＝τ（－$A_2$∨B）－τ（（－$A_1$∨B）∧（－$A_2$∨B））≥0。

故增加前提集合中公式的数量，一般地可使逻辑推出的有效度增加，增加的程度是δ（$A_2$；B）－δ（$A_1$∨$A_2$；B）。

为了给出理论Γ的有效结论由理论发散度描述的充要条件，我们先证明下列引理。

引理3.1　设有限理论Γ＝｛$A_1$，…，$A_m$｝⊂F(S)。则div(Γ)＝1－τ（$A_1$∧…∧$A_m$）。

证明　对B∈F(S)，首先证明B是理论Γ的有效结论当且仅当$T_i$（Γ）⊆$T_1$(B).由引理2.2得

τ（（$A_1$∧…∧$A_m$）→B）＝τ（$A_1$∧…∧$A_m$∧B）－τ（$A_1$∧…∧$A_m$）+1

$=\frac{1}{2^n}$ | $\bigcap_{i=1}^{m}$$T_1$($A_i$)E$T_1$(B)|－|$\bigcap_{i=1}^{m}$$T_1$（$A_i$）|]+1＝$\frac{1}{2^n}$[|$T_1$（Γ）∩$T_1$（B）|－|$T_1$（Γ）|]+1。

故B是Γ的有效结论当且仅当|$T_1$（Γ）∩$T_1$（B）|＝|$T_1$（Γ）|，即$T_1$（Γ）⊆$T_1$（B）。

A，B∈D（Γ），则由定义2.3及引理2.2得

P（A，B）＝τ（A∨B）－τ（A∧B）＝$\frac{1}{2^n}$[|$T_1$（A）∪$T_1$（B）|－|T（A）∩$T_1$（B）|]，

且由上述证明知$T_1$（Γ）⊆$T_1$（X），其中X＝A。故令$T_1$（A）＝$T_1$（Γ）∪$S_1$，$T_1$（B）＝$T_1$（Γ）∪$S_2$，其中｛$S_1$，$S_2$｝是$U_n$－$T_1$（Γ）的一个划分，则A′B′∈D（Γ），且

P（A',B'）＝$\frac{1}{2^n}$。[|$T_1$（Γ）∪$S_1$∪$S_2$|－|$T_1$（Γ）|]＝$\frac{1}{2^n}$[|$U_n$|－|$T_1$（Γ）|]＝1－$\frac{1}{2^n}$|$T_1$（Γ）|＝1－τ（$A_1$∧…∧$A_m$）。

故得div(Γ)＝sup｛P(A，B)|A，B∈D(Γ)｝=p(A',B')=1-τ（$A_1$∧…∧$A_m$）。

定理3.3　设$\Gamma=\{A_1, \ldots, A_m\}\subset F(S)$，$B\in F(S)$.则$\delta(\Gamma, B)=\mathrm{div}(\Gamma)-\mathrm{div}(\Gamma\cup\{B\})+1$。

证明　由引理2.2及引理3.1得

$\delta(\Gamma, B)=\tau((A_1\wedge\ldots\wedge A_m\to B)=\tau(A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge B)-\tau(A_1\wedge\ldots\wedge A_m)+1$。

$=[1-\tau(A_1\wedge\ldots\wedge A_m)]-[1-\tau(A_1\wedge\ldots\wedge A_m\wedge B)]+1=\mathrm{div}(\Gamma\cup\{B\})+1$。

故结论成立。

下面我们讨论在基本逻辑运算下理论的有效结论问题。

定理3.4　设$\Gamma=\{A_1, \ldots, A_m\}\subset F(S)$。则对$B, C\in D(\Gamma)$，有$B\vee C$，$B\wedge C$，$B\to C$，$B\Leftrightarrow C\in D(\Gamma)$。

证明　设$C=\{A_1, \ldots, A_m\}$。由$B, C\in D(\Gamma)$，则$G\to B$，$G\to C$均为重言式。故对$B\vee C$，$B\wedge C$，$B\to C$由

$\tau(G\to(B\vee C))=\tau((G\to B)\vee(G\to C))=1$，$\tau(G\to(B\wedge C))=\tau((G\to C))=1$，

$$\tau(G\to(B\to C))=\tau((G\to C)\vee -B)=1,$$

得$B\vee C$，$B\vee C$，$B\to C\in D(\Gamma)$。由$B\Leftrightarrow C=(B\to C)=(C\to B)$，而$B\to C$，$C\to B\in D(\Gamma)$故$B\Leftrightarrow C\in D(\Gamma)$.

我们利用理论$\Gamma$的发散度给出$D(\Gamma)$中任意两个公式的相似度的一个下界。

定理3.5　设$\Gamma=\{A_1, \ldots, A_m\}\subset F(S)$.AB，$C\in D(\Gamma)$，则$\xi(B, C)\geqslant 2a-\mathrm{div}(\Gamma)-1$。

证明　设$G=A_1\wedge\ldots\wedge A_m$.由$B, C\in D(\Gamma)$，则$\tau(G\to B)=1$，$\tau(G\to C)=1$。由

$G\to(B\to C)=(G\to B)\to(G\to C)$，$G\to(C\to B)=(G\to C)\to(G\to B)$，故

$G\to((B\to C)\wedge(C\to B))=((G\to B)\to(G\to C))\wedge((G\to C)\to(G\to B))$。

两边取真值，并整理得

$$\xi(G\to B, G\to C)=\xi(B, C)-\tau(G\vee((B\to C)\wedge(C\to B)))+1。$$

$=\tau(G\to B)+\tau(G\to C)=2\tau((G\to B)\vee(G\to C))+1$。

由$\tau((G\to B)\vee(G\to C))\leqslant 1$,$\tau(G\vee((B\to C)\wedge(C\to B)))\geqslant G$，及条件得

$$\xi(B, C)\geqslant A2+\tau(G)-2=2a-\mathrm{div}(\Gamma)-1。$$

结论得证。

## 4　结束语

本文基于公式的真度概念，给出了二值命题逻辑系统中的公式由理论逻辑推出的有效度概念以及基于主范式的下标集合的有效度的计算方法，讨论了在基本逻辑运算下理论的有效结论问题，给出了同一理论的结论的相似度的与理论发散度相关的一个下界。关于二值命题逻辑系统中理论的有效结论的类型和分类问题，将另文讨论。

## *参考文献*

[1]王国俊，傅丽，宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论[J].中国科学（A辑），2001，31（11）：998－1008
[2]王国俊.计量逻辑学（I）[J].工程数学学报，2006，23（2）：191－215
[3]王国俊,折延宏. 二值命题逻辑中理论的发散性、相容性及其拓扑刻画[J]. 数学学报（中文版），2007，50（4）：841－850
[4]左孝凌. 离散数学[M]. 上海：上海科学技术文献出版社，1982