山東農業大學學報
JOURNAL OF SHANDONG AGRICULTURAL UNIVERSITY
(自然科学版)，2008，39(3)：457-460

二值命题逻辑中有限理论的α－结论

王爱青 1，王廷明 2
(1. 青岛理工大学 理学院，青岛 266033；2. 青岛大学 师范学院，青岛 266071)

摘要：以公式真度概念为基础，给出了二值命题逻辑系统中有限理论的α－结论的判定条件，讨论了在基本逻辑运算下理论的α－结论问题以及同一理论的结论的相似度。
关键词：有限理论；真度；有效度；α－结论
中图分类号：O141.3　　文献标识码：A　　文章编号：1000－2324（2008）03－0457－04
收稿日期：2006-07-27
基金项目：山东省2001年度重点攻关项目资助，项目号（012010116）
作者简介：王爱青（1963-），女，副教授，主要从事数理逻辑领域教学与研究工作。

The α－conclusion of the Finite Theory in Two-valued Propositional Logic

WANG Ai-qing 1, WANG Ting-ming 2
(1. School of Science, Qingdao Technological University, Qingdao 266033 China;2. Teachers College, Qingdao University, Qingdao 266071,China)

Abstract:Based on the truth degree in this paper,we approach the determinant conditions of the finite theory in two-valued propositional. Meanwhile we also discuss the theoretical problem of α－conclusion under the logical operation and the similarity of the identity theory.
Key words：Finite theory； truth degree；effective measure；α－conclusion

1 引言

在二值命题逻辑中，根据公式在各种赋值下的取值情况，可将公式分类为重言式（真确度为1）、矛盾式（真确度为0）和可满足式。关于公式的真确度，文献[1-4]利用势为2的均匀概率空间的无穷乘积以及由公式诱导的Boole函数在二值命题逻辑中引入命题公式的真度概念，从而把原来只就重言式和矛盾式给出真度的情形推广为每个公式都有真度的情形。公式的真度是公式真确度的一种数值表征，也是公式为真程度化以及近似推理研究中的一个基本数量特征。如何描述一个公式是某一有限理论结论的程度，本文以公式真度概念为基础，给出了二值命题逻辑系统中有限理论的α－结论的判定条件，讨论了在基本逻辑运算下有限理论的α－结论问题以及同一理论的结论的相似度。

2 公式的真度和有限理论的发散度

设 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 为n个互异的命题变元，S=｛P_1，P_2，…，P_n｝，F（S）表示S上的命题公式全体。

定义2.1[1，4] 设A∈F（S），$\bar{A}$：$\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 是A诱导的Boole函数。令τ（A）＝$\frac{1}{2^n}|\bar{A}^{-1}(1)|$，称τ（A）为公式A的真度。

由于 $\bar{A}^{-1}(1)$ 是公式A的成真赋值的个数，本文记 $\bar{A}^{-1}(1)$＝T（A）。则公式A的真度τ（A）＝$\frac{1}{2^n}|T(A)|$。对A，B∈F(S)，显然有T（A∧B）＝T（A）∩T（B），T（A∨B）＝T（A）∪T（B）以及T（－A）＝$\{0,1\}^n$－T（A）。公式在基本逻辑运算下的真度有下列结果。

引理2.1[1，4] 设A，B∈F（S）。则

（1）τ（－A）＝1－τ（A）。
（2）τ（A∨B）＝τ（A）+τ（B）－τ（A∧B）。

引理2.2 设A，B∈F（S）。则τ（A→B）＝τ（A∧B）－τ（A）+1。

证明 由（A→B）∨A是重言式，故由引理2.1得

1＝τ（（A→B）∨A）＝τ（A→B）+τ（A）－τ（（A→B）+τ（A）－τ（A∧B），移项得τ（A→B）＝τ（A∧B）－τ（A）+1。

定义2.2[1] 设Γ是F（S）中的理论，称$div(\Gamma)=\sup\{\rho(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}$为$\Gamma$的发散度。

对F（S）中的有限理论$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}$，我们可以给出其发散度的真度表示式。记D（Γ）为Γ-结论集，$T(\Gamma)=T(A_1)\cap\dots\cap T(A_m)$，$C_\Gamma=A_1\wedge\dots\wedge A_m$。

引理2.3 设$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}\subset F(S)$，$A\in F(S)$。则A是理论Γ的结论当且仅当$T(\Gamma)\subseteq T(A)$。

证明 对$A\in F(S)$，由引理2.2得

$$\tau(C_\Gamma\to A)=\tau(C_\Gamma\wedge A)-\tau(C_\Gamma)+1=\frac{1}{2^n}[|T(\Gamma)\cap T(A)|-|T(\Gamma)|]+1。$$

故A是Γ的结论当且仅当$\tau(C_\Gamma\to A)=1$，故$|T(\Gamma)\cap T(A)|=|T(\Gamma)|$，即$T(\Gamma)\subseteq T(A)$。

定理2.1 设有限理论$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}\subset F(S)$。则$div(\Gamma)=1-\tau(C_\Gamma)$

证明 $\forall A,B\in D(\Gamma)$，由引理2.2，令$T(A)=T(\Gamma)\cup S_1$，$T(B)=T(\Gamma)\cup S_2$，其中$S_1=T(A)-T(\Gamma)$，$S_2=T(B)-T(\Gamma)$。故

$$\rho(A,B)=\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)=\frac{1}{2^n}[|T(A)\cup T(B)|-|T(A)\cap T(B)|]=\frac{1}{2^n}[|S_1\cup S_2|-2|S_1\cap S_2|]。$$

令$T(A')=T(\Gamma)\cup S'_1$，$T(B')=T(\Gamma)\cup S'_2$，其中$\{S'_1,S'_2\}$构成$\{0,1\}^n-T(\Gamma)$的一个划分，则$A',B'\in D(\Gamma)$，且

$$\rho(A',B')=\frac{1}{2^n}[2^n-|T(\Gamma)|]=1-\frac{1}{2^n}|T(\Gamma)|=1-\tau(C_\Gamma)$$。故由$div(\Gamma)=\sup\{\rho(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}=\rho(A',B')$得结论成立。

3 有限理论的α－结论

设$\Gamma=\{A_1,\dots,A_m\}\subset F(S)$，$B\in F(S)$。若$C_\Gamma\to A$是重言式，称A是F（S）中理论Γ的有效结论[5]。我们利用公式的真度给出理论逻辑推出的有效度概念。

定义3.1 设Γ是F（S）中的有限理论，$A\in F(S)$。称$\delta(\Gamma,A)=\tau(C_\Gamma\to A)$为A是Γ-结论的有效度.

定义3.2 设Γ是F（S）中的有限理论，$A\in F(S)$。对$0\leqslant\alpha\leqslant1$，若$\delta(\Gamma,A)\geqslant\alpha$，称A是理论Γ的α－结论。对$\alpha=\frac{k}{2^n}$（$K=0,1,\dots,2^n$），若$\delta(\Gamma,A)=\alpha$，称A是理论Γ的可达α－结论。

记Γ的α－结论全体为$D_\alpha(\Gamma)$.当α=1时，A是理论Γ的有效结论，此时去掉$D_\alpha(\Gamma)$的下缀记为D（Γ）。下面给出公式A是理论Γ的α－结论的充要条件。

定理3.1 设$\Gamma=\{A,\dots,A\}\subset F(S)$，$A\in F(S)$。则$A\in D(\Gamma)$的充要条件是$|T(\Gamma)-T(A)|\leqslant2^n$

（1－α）。

证明　由引理2.2得

$$\delta（\Gamma，B）=\tau（C_{\Gamma}\rightarrow A）=\tau（C_{\Gamma}\wedge A）-\tau（C_{\Gamma}）+1$$

$$=1-\frac{1}{2^{n}}[|T（C_{\Gamma}）|-|T（C_{\Gamma}）\cap T（A）|]=1-\frac{1}{2^{n}}|T（\Gamma）-T（A）|，$$

从而由A∈D_{α}（Γ）的充要条件是δ（Γ，B）$_{\alpha}$得结论成立。

定理3.2　设Γ=｛A_1，…，A_m｝⊂F(S)，A∈F（S）。则A∈D_{α}（Γ）的充要条件是

$$div(\Gamma\cup\{A\})\leqslant div(\Gamma)-\alpha+1。$$

证明　由引理2.2及定理2.1得

$$（\Gamma，A）=[1-\tau（C_{\Gamma}）]-[1-\tau（C_{\Gamma}\wedge A）]+1=div（\Gamma）-div（\Gamma\cup\{A\}）+1。$$

由A∈D_{α}（Γ）的充要条件是δ（Γ，A）$_{\alpha}$，故结论成立。

定理3.2说明A是理论Γ的α－结论当且仅当在Γ中添加A后的发散度不超过Γ的发散度与1－α的和，并且在证明过程中给出了有效度与发散度的基本关系式δ（Γ，A）＝div（Γ）－div（Γ∪｛A｝）+1。同时也说明对F（S）中的任一公式A，和式δ（Γ，A）+div（Γ∪｛A｝）相对于理论Γ而言总是常数1+div（Γ）。另外，在上述两个定理中令α＝1，则可得A是理论Γ的有效结论的充要条件。再者，将上述三个定理结论中的不等号换成等号，当$\alpha=\frac{k}{2^{n}}$（k=0,1,…，2^n）时，即得A是理论Γ的可达α－结论的充要条件。关于理论的可达α－结论以及在基本逻辑运算下公式的α－结论的性质有下列结果。

定理3.3　设Γ=｛A_1，…，A_m｝⊂F(S)，令T_0（Γ）＝｛0，1｝^{n}－T（Γ）且|T_0（Γ）|＝r。则对$\alpha=\frac{k}{2^{n}}$（k=0,1,…，2^n），当0≤k＜r时，理论Γ不存在可达α－结论。而当k≥r时，理论Γ存在可达α－结论。

证明　∀A∈F（S）.当0≤k＜r时，由引理2.2得

$$\delta（\Gamma，A）=\frac{1}{2^{n}}[2^{n}+|T（\Gamma）\cap T（A）|-|T（A）|]$$

$$=\frac{1}{2^{n}}[2^{n}-|T（\Gamma）-T（A）|]=\frac{1}{2^{n}}|\{0，1\}^{n}-[T（\Gamma）-T（A）]|$$

$$=\frac{1}{2^{n}}|T_{0}（\Gamma）\cup T（A）|\geqslant\frac{1}{2^{n}}|T_{0}（\Gamma）|=\frac{r}{2^{n}}>\frac{k}{2^{n}}=\alpha，$$

故理论Γ的可达α－结论不存在。当k≥r时，若k=r，设T_0（Γ）＝｛I_{i1}，…，I_{ir}｝，其中I_{ij}∈｛0，1｝^{n}且I_{ij}对应的十进制数为i_j(j=1,…，r)。令A＝m_{i1}，其中m_{i1}表示极小项。则δ（Γ，A）＝$\frac{1}{2^n}$｜T_0（Γ）∪T（A）｜＝$\frac{r}{2^n}$＝α；若k＞r，取B＝$\bigvee\limits_{i\in I} m_i$，其中I⊆T(Γ)且｜I｜＝k-r。则δ（Γ，A）＝$\frac{r+(k-r)}{2^n}$＝α，从而这样的公式A是理论Γ的可达α－结论。

定理3.4　设Γ＝｛A_1，…，A_m｝⊂ F（S）.则对A，B∈D_α（Γ），有A→B∈D_α（Γ）。

证明　由A，B∈D_α（Γ），则τ（C_Γ→B）≥α。 故有

$$\delta(\Gamma, A\to B)=\tau((C_\Gamma\to B)\vee\neg A)\geq\tau(C_\Gamma\to B)\geq\alpha,$$

即A→B∈Dα（Γ）。

定理3.5　设Γ＝｛A_1，…，A_m｝⊂ F（S）。∀A，B∈D_α（Γ），当1／2≤α≤1时，则A∧B，A∨B∈$D_{2\alpha-1}$（Γ）。

$$\delta(\Gamma, A\wedge B)=\tau((C_\Gamma\to A)\wedge(C_\Gamma\to B))$$

＝τ（C_Γ→A）+τ（C_Γ→B）－τ（（C_Γ→A）∨（C_Γ→B））≥τ（C_Γ→A）+τ（C_Γ→B）－1≥2α－1。即A∧B∈$D_{2\alpha-1}$（Γ）。对A∨B，同理可得δ（Γ，A∨B）≥2α－1，即A∨B∈$D_{2\alpha-1}$（Γ）。从而结论成立。

利用理论Γ的发散度可以给出D_α（Γ）中任意两个公式相似度的一个下界。

定理3.6　设Γ＝｛A_1，…，A_m｝⊂ F(S). ∀A,B∈D_α（Γ），则ξ（A，B）≥2a-div（Γ）－1。

证明　对A，B∈D_α（Γ），则τ（C_Γ→A）≥α，τ（C_Γ→B）≥α。 由

$$C_\Gamma\to(A\to B)=(C_\Gamma\to A)\to(C_\Gamma\to B),\ C_\Gamma\to(B\to A)=(C_\Gamma\to B)\to(C_\Gamma\to A)，故$$

$$以C_\Gamma\to((A\to B)\wedge(B\to A))=(((C_\Gamma\to A)\to(C_\Gamma\to B))\wedge((C_\Gamma\to A))。$$

两边取真值，由引理2.2得

$$\xi(A,B)-\tau(C_\Gamma\vee((A\to B)\wedge(B\to A)))+1=\xi(C_\Gamma\to A, C_\Gamma\to B)$$
$$=\tau(C_\Gamma\to A)+\tau(C_\Gamma\to B)-2\tau((C_\Gamma\to A)\vee(C_\Gamma\to B))+1。$$

由τ（（C_Γ→A）∨（C_Γ→B）≤1，τ（C_Γ∨（（A→B）∧（B→A）））≥τ（C_Γ）及条件得

$$\xi(A,B)\geq2\alpha+\tau(C_\Gamma)-2=2\alpha-\mathrm{div}(\Gamma)-1。$$

结论得证。

参考文献

[1]王国俊.数理逻辑引论与归结原理[M].北京：科学出版社，2003
[2]王国俊，傅丽，宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论[J].中国科学，A辑.2001，31（11）：998-1008
[3]王国俊，王伟.逻辑度量空间[J].数学学报（中文版），2001，44（1）：159-168
[4]王国俊.计量逻辑学（I）[J].工程数学学报，2006，23（2）：191-215
[5]左孝凌. 离散数学[M]. 上海：上海科学技术文献出版社，1982

返回