2010年太原科技大学硕士研究生入学考试

（841）高等代数试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一．填空题（每小题5分，共20分）

1. 设3阶矩阵A的特征值为2，3，λ，若行列式$|2A|=-48$，则$\lambda=$__________.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+4\alpha_3,3\alpha_3)$，如果$|A|=1$，那么$|B|=$__________.

3．已知5级λ－矩阵$A(\lambda)$的各级行列式因子为

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1,\quad D_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1),\quad D_5(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2$$

则$A(\lambda)$的不变因子是为__________，$A(\lambda)$的的标准形为__________.

4. $P^{n\times n}$中全体对称矩阵作成的数域P上的线性空间是__________维的.

二、（本题20分）用正交的线性替换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

为标准形，并写出所作的正交线性替换。

三、（本题20分）

设V_1与V_2分别是齐次线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$与$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=x_n$的解空间，证明$P^n=V_1\oplus V_2$。

四、（本题20分）已知A,B为3阶矩阵，且满足$2A^{-1}B=B-4E$，其中E为3阶单位矩阵，

（1） 证明：矩阵$A-2E$可逆；

（2） 若$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求矩阵$A$。

五、（本题20分）设A,B为同阶方阵，

（1） 如果A,B相似，证明A与B的特征多项式相等；

（2） 举一个2阶方阵的例子说明（1）的逆命题不成立；

（3） 当A,B为实对称矩阵时，证明（1）的逆命题成立。

六、（本题 20 分）全体二阶实矩阵构成实数域上的线性空间V，取固定实数矩阵$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，在$V$中定义一个变换$\sigma(X)=AX-XA$，其中$X$是$V$中的任意向量。

（1） 证明：σ是一个线性变换；

（2） 证明：对任意的$X,Y\in V$，总有$\sigma(XY)=\sigma(X)Y+X\sigma(Y)$；

（3） 在V中取一组基

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

写出σ在这组基下的矩阵。

（4）证明：σ有零特征值。

七、（本题 20 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$为线性方程组$AX=0$的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\ \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\ \ldots\ldots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$,其中$t_1,t_2$为实常数，试问当$t_1,t_2$满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$也是$AX=0$的一个基础解系。

八、（本题10分）设A为m阶实对称矩阵并且正定，B为$m\times n$实矩阵，B的秩为n，B'为B的转置矩阵，证明$B'AB$为正定矩阵。