# 商映射

**定义**：设 $X$ 和 $Y$ 是拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 称为商映射，如果（1） $f$ 连续；(2） $f$ 是满射；(3） 设 $B\subset Y$，如果 $f^{-1}(B)$ 是 $X$ 的开集，则 $B$ 是 $Y$ 的开集。

**定理**：若 $f:X\to X'$ 是商映射， $g:X'\to Y$ 是一映射，则 $g$ 连续 $\Leftrightarrow$ $g\circ f$ 连续。

**命题 1**：如果 $f:X\to Y$ 是商映射，则 $X/\underset{f}{\sim}\cong Y$。

**命题 2**：连续的满映射 $f:X\to Y$ 如果还是开映射或闭映射，则它是商映射。

**命题 3**：如果 $X$ 紧致，$Y$ 是 *Hausdorff* 空间，则连续的满映射 $f:X\to Y$ 一定是商映射。

**命题 4**：商映射的复合也是商映射。

例 1： $D^2/S^1\cong S^2$。

$f:D^2\to S^2$

$f(re^{i2\pi\theta})=(2\sqrt{r(1-r)}\cos\theta,2\sqrt{r(1-r)}\sin\theta,2r-1)$

例 2：证明投射 $p_i:X_1\times X_2\to X_i(i=1,2)$ 为连续的开满映射，从而为商映射。

**证明**： $p_1:X_1\times X_2\to X_1$，设 $U$ 为 $X_1$ 的开集，则

$P_1^{-1}(U)=U\times X_2$，$U\times X_2$ 为 $X_1\times X_2$ 的开集，所以 $P_1$ 是连

续的。同理可证$P_2$是连续的。

设$U\times V$为$X_1\times X_2$的一个拓扑基，其中$U$为$X_1$的开集，$V$为$X_2$的开集，$P_1(U\times V)=U$，于是$X_1\times X_2$中拓扑基的每个成员被映为$X_1$中的开集，所以$P_1$为开映射。同理可证$P_2$为开映射。

对$\forall x\in X_1$，总能在$X_1\times X_2$中找到$\{x\}\times X_2\subset X_1\times X_2$与$x$在$P_1$下对应，所以$P_1$为满映射。同理可证$P_2$为满映射。

综上所述投射$p_i:X_1\times X_2\to X_i\,(i=1,2)$为连续的开满映射，从而为商映射。

作业：P.86 Ex3、Ex5、Ex11