第四讲　连续映射与同胚映射

（2005.3.10 第 3、4 节）

一、　一元连续函数（在数学分析中）

函数 $f: E^1 \to E^1$ 在 x_0 处连续

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ （用 $\varepsilon - \delta$ 语言定义）

二、　度量空间之间的连续函数

函数 $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ 在 x_0 处连续

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时，有 $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ （用 $\varepsilon - \delta$ 语言）

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时，有 $f(x) \in O(f(x_0), \varepsilon)$ （用开球语言）

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得 $f(O(x_0, \delta)) \subset O(f(x_0), \varepsilon)$ （用开球语言）

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得 $O(x_0, \delta) \subset f^{-1}(O(f(x_0), \varepsilon))$ （用开球语言）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集，则 $\exists$ 包含 x_0 的开集 U 使 $f(U) \subset V$ （用开集语言）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集，则 $\exists$ 包含 x_0 的开集 U 使 $U \subset f^{-1}(V)$ （用开集语言）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是 (Y, ρ) 的开集，则 $\exists$ (X, d) 的开集 U 使 $U \subset f^{-1}(V)$ （用开集语言）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是 (Y, ρ) 的开集，则 $\exists$ (X, d) 的开集 U 使 $U \subset f^{-1}(V)$ （用开集语言）

$\Leftrightarrow$ Y 的开集在 f 下的原像是 X 的开集 $\Leftrightarrow$ 开集的原像是开集

三、　度量空间之间的连续函数

若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集，则 $\exists$ 包含 x_0 的开集 U，使 $f(U) \subset V$

（开集语言）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是 $f(x_0)$ 的邻域，则 $f(U)$ 是 x_0 的邻域 U。（邻域语言）

四、 函数在一点连续

- **定义** 设 X 和 Y 都是拓扑空间，$f:X\to Y$，$x\in X$. 如果 $f(x)$ 的任意一个邻域 V（在 Y 中），$f^{-1}(V)$ 总是 x 的邻域（在 X 中），则称 f 在 x 处连续.

- **命题** 设 $f:X\to Y$ 是映射，$A\subset X$，$x\in A$。若 $f|A:A\to Y$ 是 f 在 A 上的限制，则

（1）如果 f 在 x 处连续，则 $f|A$ 在 x 处也连续.

（2）若 A 是 x 的邻域，则当 $f|A$ 在 x 处连续时，f 在 x 处也连续.

五、 拓扑空间中的连续函数

- **定义** 设 $f:X\to Y$ 是映射，若 $\forall x\in X$，f 在 x 处都连续，则称 f 是**连续映射.**
- **定理** 设 $f:X\to Y$ 是一个映射，则下列条件两两等价：

（1）f 是连续映射；

（2）Y 的开集在 f 下的原像是 X 的开集；

（3）Y 的闭集在 f 下的原像是 X 的闭集；

（4）若 $A\subset X$，则 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$；

（5）若 $B\subset Y$，则 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

六、 连续映射的例子和性质

- **连续映射的例子：**

1、恒等映射：$id:X\to X$，其中两个 X 有相同的拓扑.

2、 包含映射：$i:A\to X$ ，其中 A 是 X 的子空间.

3、常值映射.

4、 $f:X\to Y$，其中 X 是离散的拓扑空间，或 Y 是平凡的拓扑空间.

- **连续映射的性质：**

1. 设 X,Y 和 Z 都是拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 在 x 处连续，$g:Y\to Z$ 在 $f(x)$ 处连续，则复合映射 $g\circ f:X\to Z$ 在 x 处连续.

2.（粘接引理）设 $\{A_{1,}A_2,\cdots A_n\}$ 是 X 的一个有限闭覆盖（或开覆盖），如果映射 $f:X\to Y$ 在每个 A_i 上的限制都是连续的，则 f 是连续映射.

七、 同胚映射

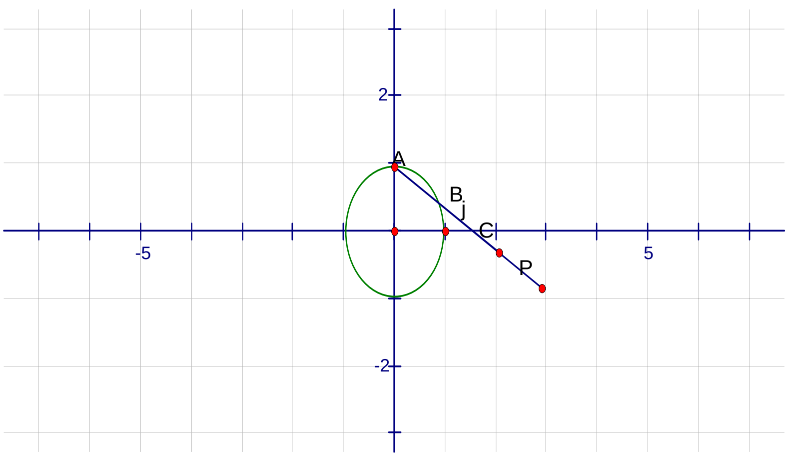
- **定义**

1. 如果 $f:X\to Y$ 是双射，并且 f 和 f^{-1} 都连续，则称 f 是一个**同胚**.

2. 若存在从 X 到 Y 的一个同胚映射，就称 X 与 Y **同胚**，记作 $X\cong Y$.

- **例 1** 证明 $S^n-\{(o,o,\cdots,o,1)\}\cong\mathbb{R}^n$

证 首先设 $S^n-\{(o,o,\cdots,o,1)\}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n$



$A=(0,0,\cdots0,1)\quad B=(x_1,x_2,\cdots x_n,x_{n+1})\quad C=(y_1,y_2,\cdots0)$

直线 AB 方程为：$\dfrac{y_1-0}{x_1-0}=\dfrac{y_2-0}{x_2-0}=\dfrac{y_3-0}{x_3-0}=\cdots\cdots=\dfrac{y_{n+1}-1}{x_{n+1}-1}$

令 $y_{n+1}=0$，则 $y_1=\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}},y_2=\dfrac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots\cdots y_n=\dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}$

因此 f(B) $=C=\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots\cdots\frac{x_n}{1-x_{n+1}},0\right)$

下面求 f 的逆映射，为此令

$$\frac{x_1-0}{y_1-0}=\frac{x_2-0}{y_2-0}=\frac{x_3-0}{y_3-0}=\cdots\cdots=\frac{x_{n+1}-1}{0-1}=t$$

则 $x_1=y_1t,x_2=y_2t,\cdots,x_n=y_nt,x_{n+1}=1-t$，又 $x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2+x_{n+1}{}^2=1$

$$\Rightarrow t+y_1{}^2t+y_2{}^2t+\cdots+t_n{}^2t=2\Rightarrow t=\frac{2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}$$

从而 $x_1=\frac{2y_1}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},x_2=\frac{2y_2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},\cdots\cdots$

$x_n=\frac{2y_n}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},x_{n+1}=1-\frac{2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}$

因此 $f^{-1}(C)=B=$

$$=\left(\frac{2y_1}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},\cdots\cdots\frac{2y_n}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},1-\frac{2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}\right)$$

因此，由 f 和 f^{-1} 的连续性知，$S^n-\{(o,o,\cdots,o,1)\}\cong\mathbb{R}^n$.

- **例 2**

(1) 设 X 为全体实数集，$\tau=\{B\subset X\mid B^c$为有限集或整个$X\}$，验证$\tau$是一个拓扑；

(2) 定义 $f:E^1\to X$ 使 $f(x)=x$，则 f 是连续映射，但不是同胚映射。

思考题

1.学了乘积空间和商空间后，写出下列哪些空间是同胚的：

（1）平面E^2　　　　（2）球面S^2

（3）圆盘 $B^2=\{(x,y)\in E^2\mid x^2+y^2\le 1\}$

（4）平环 $\{(x,y)\in E^2\mid 1\le x^2+y^2\le 2\}$

（5）圆柱的侧面 $S^1\times[0,1]$　　　（6） B^2/S^1

（7）球面去掉一点 $S^2-\{x\}$　　（8） $B^2\cup_i B^2$

（9） $S^1\times S^1$　　（10） $S^1\times[0,1]/S^1\times\{1\}$

2．证明：$[0,1]$ 与 $[0,1)$ 不同胚。（学了紧性之后考虑）

3．设 $A\subseteq E^1$，证明：（1）不存在 S^1 到 E^1 上的连续满射。

（2）不存在 S^1 到 A 上的连续满单射。（学了连通性之后考虑）

作业 P.28　ex.2、ex.4、ex.9、ex.12.