Preface

本课程是一门现代数学基础课程，介绍拓扑学的比较容易掌握和比较有应用价值的基础概念和基本方法，通过这门课程的学习，使学生在掌握拓扑学基本知识的基础上，掌握拓扑学研究问题的整体性、抽象性及高度概括性，力求活跃其数学思想，从而培养学生运用较高层次的数学观点和数学知识，能对实际问题进行分析、归纳、提炼和解决，提高他们的数学素养及开展科研工作的能力。

一、　参考书

1．江泽涵　《拓扑学引论》

2．Armstrong,M.A.　Basic Topology.　(孙以丰译)

3．熊金城　《点集拓扑讲义》

4．Kelley,J.L.　General Topology.

二、　拓扑学的几个分支

1．一般拓扑学（也称点集拓扑学）

2．代数拓扑学（用代数方法研究）

（1）　同调论

（2）　同伦论

3．微分拓扑学（用分析方法研究）

拓扑学是现代数学的重要分支。根据研究方法的不同，拓扑学发展到今天，在理论上已经十分明显分成了若干个分支。如，第一个分支：点集拓扑学，也叫做一般拓扑学，它是研究空间结构及空间图形在连续形变下保持不变的性质；第二个分支：代数拓扑学，它综合代数、分析和几何的方法，其内容最为丰富，其中的同调论和同伦论既自成体系，又相互影响；另一个分支是微分拓扑学，它以微分流形为基础。拓扑学采用了极为有力的表述形式及高度抽象的观点、方法，使它的理论显得十分简捷而具有高度的概括力。以致于它的理论广泛地应用到现代数学的各个分支。拓扑学不仅在泛函分析、抽象代数、李群论、微分几何、微分方程等其他许多数学分支中有着广泛的应用。而且在自然科学和其它工程技术领域的许多学科诸如电路网络、理论物理、计算机、电子通讯、现代控制理论乃至原子核构造理论等学科都具有广泛的应用，已成为现代数学及现代技术领域中不可替代的基础工具之一，是非数学类众多领域的研究生必修的数学基础课程。

三、　拓扑学的直观认识

1．哥尼斯堡七桥问题

18 世纪的欧洲，有一位伟大的数学家，全欧洲的科学家都以他为师表，都称自己是他的学生，他就是大数学家欧拉。

1736 年，为欧拉在彼得堡担任教授时，他解决了一个有趣的“七桥问题”，这个趣题一直流传到现在，并相信它是拓扑学产生的萌芽。

当时与普鲁士首府哥尼斯堡有一条普雷格尔河，这条河有两个支流，

还有一个河心岛，共有七座桥把两岸和岛连起来。有一天，人们教学的时候，有人提出一个问题："如果每座桥走一次且只走一次，又回到原来地点，应该怎么走？"当时没有一个人能找到答案。这个问题传到住在彼得堡的欧拉耳中，当然，他不会去哥尼斯堡教学，而是把问题画成一张图：小岛、河岸画成点，桥画成连结点的线，他考虑：如果能从一个点开始用笔沿线画（就像人过桥一样）笔不准离开纸（人连续走路），同一条线不准画两遍（每座桥只经过一次），所有线都画完，最后能否回到原来的出发点？这就是"一笔画"问题。欧拉意识到他所研究的几何问题是一种新的几何学，所研究的图形与形状和大小无关，最重要的是位置怎样用弧连结，这张图就是一个网络。

欧拉为什么能抽象出这张图呢？是他利用了几何的抽象化和理想化来观察生活，初一几何开始讲点、线、面，这些几何概念是从现实中抽象化和理想化而来，笔尖点在纸上是一个点，在地图上一个城市是一个点，在欧拉眼中，岛和陆地抽象成点，马路可看成线，欧拉眼中，桥抽象成线，直线是笔直的生活中没有完全精确的笔直线，这是理想化了，正因为数学的这种抽象，才使数学具有"应用的广泛性"这一特点。欧拉怎样解决的这个问题呢？若一个顶点发出的弧的条数为奇数时，称为奇顶点；发生的弧的条数为偶数时，称为偶顶点，一笔画一定有一个起点、一个终点和一定数目的通过点，分两种情况考虑：第一种：起点和终点不是同一点，把集中在起点的所有弧画完为止，有进有出，最后一笔必须画出去，所以起点必须是奇顶点；另一方面把集中在终点的所有弧线画完为止，最后一笔必须画进来，因此，终点也必须是奇顶点；其它经过的点，有几条弧画进来，必有同样多的弧画出去，必是偶顶点。第二种：起点和终点为同一点，又画出去，又画进来，必为偶顶点，其它顶点有进有出也都是偶顶点，因此，欧位得出以下结论：

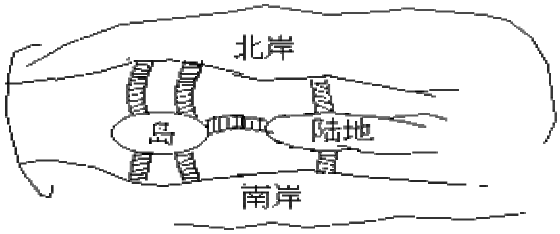
1）全是偶顶点的网络可以一笔画。

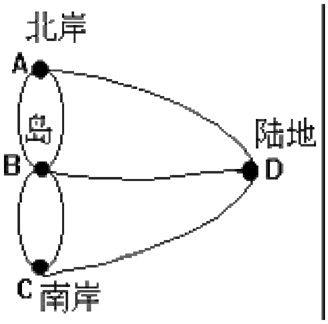
2）能一笔画的网络的奇顶点数必为 0 或 2。

3）如果一个网络有两个奇顶点，它就可以一笔画，但最后不能回到原来的出发点，这时，必须从一个奇顶点出发，然后回到另一个奇顶点。

用欧拉的发现去分析七桥问题，这张图上的 A、B、C、D 全是奇顶点，因此，不能一笔画，所以，游人一次走遍七桥是不可能的。

看完欧拉的解法，启发我们：生活中许多问题用数学方法解决，但首先要抽象化和理想化，其中点和线的抽象又是最基本的。





2．平面布线问题

充要条件：不含 $K_{3,3}$ 和 K_5 作为部分图。

3．多面体的欧拉公式

多面体的欧拉示性数 $v-e+f$ ，它是一个拓扑不变量。

应用：**证明正多面体只有五种**。

Lemma 设 P 为正多面体，它的每个面有 p 条边，每 q 个面相交于一个顶点, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$。

[证]设该多面体有 **v** 个顶点、**e** 条边、**f** 个面, 则

$$e=\frac{fp}{2}，\quad f=\frac{vq}{p},$$

即 $\frac{1}{p}=\frac{f}{2e}$， $vq=fp=2e$， $\frac{1}{q}=\frac{v}{2e}$

从而由 Euler 定理知， $v-e+f=2$,
即 $v+f=2+e$，两边同除以 **2e** 即得

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$$

Theorem 正多面体只有五种。

证 由上题知 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$

易见

$$p\geq 3, q\geq 3,$$

下证 $3\leq p<6$，$3\leq q<6$，

由 $q\geq 3$ 知, $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}-\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

即$3 \le p < 6$，同理 $3 \le q < 6$

Case 1

当$p=3$，$q=3$时，由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$知，$e=6$，

从而$f=\frac{2e}{p}=4$

Case 2

当$p=4$，$q=3$时，由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$知，$e=12$，

从而$f=\frac{2e}{p}=6$

Case 3

当$p=5$，$q=3$时，由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$知，$e=30$，

从而$f=\frac{2e}{p}=12$

Case 4

当$q=4$时，由$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{e}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$知$3 \le p < 4$，即$p=3$，由

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$知，$e=12$，从而$f=\frac{2e}{p}=8$

Case 5

当 $q=5$ 时，由$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}-\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}>\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ 知 $3 \le p < 4$ 即

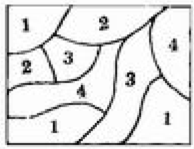
$p=3$，再由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$知，$e=30$，从而$f=\frac{2e}{p}=20$

因此正多面体只有五种，他们是正 4 面体, 正 6 面体, 正 8 面体, 正 12 面体, 正 20 面体。

4．四色问题

四色问题又称四色猜想，是近代三大世界数学难题之一。

四色问题的内容是："任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的两个国家具有不同的颜色。"用数学语言表示，即"将平面任意地细分为不互相重叠的区域，每一个区域总可以用 1，2，3，4 这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域得到相同的数字。"（右图）



这里所指的相邻区域，是指有一整段边界是公共的。如果两个区域只相遇于一点或有限多点，就不叫相邻的。因为用相同的颜色给它们着色不会引起混淆。

四色猜想的提出来自英国。1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯·格思里来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象，看来每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的两个国家都具有不同的颜色。这个现象能不能从数学上加以严格证明呢？他和在大学读书的弟弟格里斯决心试一试。兄弟二人为证明这一问题而使用的稿纸已经堆了一大叠，可是研究工作没有进展。

1852 年 10 月 23 日，他的弟弟就这个问题的证明请教了他的老师、著名数学家德·摩尔根，摩尔根也没有能找到解决这个问题的途径，于是写信向自己的好友、著名数学家汉密尔顿爵士请教。汉密尔顿接到摩尔根的信后，对四色问题进行论证。但直到 1865 年汉密尔顿逝世为止，问题也没有解决。

1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题。世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战。1878 至 1880 的两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。

肯普的证明是这样的：首先指出如果没有一个国家包围其他国家，或没有三个以上的国家相遇于一点，这种地图就说是"正规的"。如为正规地图，否则为非正规地图。一张地图往往是由正规地图和非正规地图联系在一起，但非正规地图所需颜色种数一般不超过正规地图所需的颜色，如果有一张需要五种颜色的地图，那就是指它的正规地图是五色的，要证明四色猜想成立，只要证明不存在一张正规五色地图就足够了。

肯普是用归谬法来证明的，大意是如果有一张正规的五色地图，就会存在一张国数最少的“极小正规五色地图”，如果极小正规五色地图中有一个国家的邻国数少于六个，就会存在一张国数较少的正规地图仍为五色的，这样一来就不会有极小五色地图的国数，也就不存在正规五色地图了。这样肯普就认为他已经证明了“四色问题”，但是后来人们发现他错了。

不过肯普的证明阐明了两个重要的概念，对以后问题的解决提供了途径。第一个概念是“构形”。他证明了在每一张正规地图中至少有一国具有两个、三个、四个或五个邻国，不存在每个国家都有六个或更多个邻国的正规地图，也就是说，由两个邻国，三个邻国、四个或五个邻国组成的一组“构形”是不可避免的，每张地图至少含有这四种构形中的一个。

肯普提出的另一个概念是“可约”性。“可约”这个词的使用是来自肯普的论证。他证明了只要五色地图中有一国具有四个邻国，就会有国数减少的五色地图。自从引入“构形”，“可约”概念后，逐步发展了检查构形以决定是否可约的一些标准方法，能够寻求可约构形的不可避免组，是证明“四色问题”的重要依据。但要证明大的构形可约，需要检查大量的细节，这是相当复杂的。

11 年后，即 1890 年，在牛津大学就读的年仅 29 岁的赫伍德以自己的精确计算指出了肯普在证明上的漏洞。他指出肯普说没有极小五色地图能有一国具有五个邻国的理由有破绽。不久，泰勒的证明也被人们否定了。人们发现他们实际上证明了一个较弱的命题——五色定理。就是说对地图着色，用五种颜色就够了。后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获。于是，人们开始认识到，这个貌似容易的题目，其实是一个可与费马猜想相媲美的难题。

进入 20 世纪以来，科学家们对四色猜想的证明基本上是按照肯普的想法在进行。1913 年，美国著名数学家、哈佛大学的伯克霍夫利用肯普的想法，结合自己新的设想；证明了某些大的构形可约。后来美国数学家富兰克林于 1939 年证明了 22 国以下的地图都可以用四色着色。1950 年，有人从 22 国推进到 35 国。1960 年，有人又证明了 39 国以下的地图可以只用四种颜色着色；随后又推进到了 50 国。看来这种推进仍然十分缓慢。

高速数字计算机的发明，促使更多数学家对“四色问题”的研究。从 1936 年就开始研究四色猜想的海克，公开宣称四色猜想可用寻找可约图形的不可避免组来证明。他的学生丢雷写了一个计算程序，海克不仅能用

这程序产生的数据来证明构形可约，而且描绘可约构形的方法是从改造地图成为数学上称为“对偶”形着手。

他把每个国家的首都标出来，然后把相邻国家的首都用一条越过边界的铁路连接起来，除首都(称为顶点)及铁路(称为弧或边)外，擦掉其他所有的线，剩下的称为原图的对偶图。到了六十年代后期，海克引进一个类似于在电网络中移动电荷的方法来求构形的不可避免组。在海克的研究中第一次以颇不成熟的形式出现的“放电法”，这对以后关于不可避免组的研究是个关键，也是证明四色定理的中心要素。

电子计算机问世以后，由于演算速度迅速提高，加之人机对话的出现，大大加快了对四色猜想证明的进程。美国伊利诺大学哈肯在 1970 年着手改进“放电过程”，后与阿佩尔合作编制一个很好的程序。就在 1976 年 6 月，他们在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1200 个小时，作了 100 亿次的判断，终于完成了四色定理的证明，轰动了世界。

这是一百多年来吸引许多数学家与数学爱好者的大事，当两位数学家将他们的研究成果发表的时候，当地的邮局在当天发出的所有邮件上都加盖了“四色足够”的特制邮戳，以庆祝这一难题获得解决。

“四色问题”的成功证明仅解决了一个历时 100 多年的难题，而且成为数学史上一系列新思维的起点。在“四色问题”的研究过程中，不少新的数学理论随之产生，也发展了很多数学计算技巧。如将地图的着色问题化为图论问题，丰富了图论的内容。不仅如此，“四色问题”在有效地设计航空班机日程表，设计计算机的编码程序上都起到了推动作用。

不过不少数学家并不满足于计算机取得的成就，他们认为应该有一种简捷明快的书面证明方法。直到现在，仍由不少数学家和数学爱好者在寻找更简洁的证明方法。

四、 可以用拓扑方法解决的问题

1．代数基本定理的证明。
2．Brouwer 不动点定理。
3．Jordan 分离定理。
4．Nielsen-Schreier 定理　自由群的子群是自由群。
5．闭曲面的分类问题。

思考题

1．找一个多面体，使它的欧拉示性数不等于 2。
2．证明凸多面体的欧拉公式 $v-e+f=2$。