第三节　乘积空间与拓扑基

在第一节中，我们曾提出过如下问题：

问题 3　设(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)都是拓扑空间，则如何给出$X_1\times X_2$上的拓扑结构τ？（**乘积拓扑**）

3.1 乘积空间

当然$X_1\times X_2$上的拓扑结构有很多，我们要找满足一定条件或者说有一定实际意义的拓扑。先给出几个概念：

1．投射：规定$j_i:X_1\times X_2\to X_i$为$j_i(x_1,x_2)=x_i(i=1,2)$，称j_i为$X_1\times X_2$到X_i的投射。当$A_i\subset X_i,B_i\subset X_i(i=1,2)$时，显然有

$$(A_1\times A_2)\bigcap(B_1\times B_2)=(A_1\bigcap B_1)\times(A_2\bigcap B_2)$$

注：τ是满足这两个投射都连续的最小拓扑。(思考为什么要这样？)

2．生成的子集族：设Γ是X的一个子集族，规定新的子集族

$\overline{\Gamma}=\{U\subset X\,|\,U$是$\Gamma$中若干成员的并集$\}$

$=\{U\subset X\,|\,\forall\in U$，存在$B\in\Gamma$，使得$x\in B\subset\Gamma\}$

称$\overline{\Gamma}$为由Γ生成的子集族。

若$U_i\in\tau_i$，则

$U_1\times U_2=(U_1\times X_2)\bigcap(X_1\times U_2)=j_1^{-1}(U_1)\bigcap j_2^{-1}(U_2)\in\tau$。

构造$X_1\times X_2$上的子集族$\Gamma=\{U_1\times U_2\,|\,U_i\in\tau_i\}$，根据拓扑公理$\tau$一定包含$\overline{\Gamma}$，因此$\tau$是包含$\overline{\Gamma}$的最小拓扑。

Pro. $\overline{\Gamma}$是$X_1\times X_2$上的一个拓扑。

Def. 称$\overline{\Gamma}$为$X_1\times X_2$上的**乘积拓扑**，称（$X_1\times X_2$，$\overline{\Gamma}$）为(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)的乘积空间。简记为$X_1\times X_2$。

类似地，可以给出有限个拓扑空间的乘积空间。

任意多个集合的笛卡尔积

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda}=\{f \mid f:\wedge\to\bigcup_{\lambda\in\wedge} X_{\lambda}\text{且} f(\lambda)\in X_{\lambda}\}。$$

无限个拓扑空间的乘积空间定义比较麻烦，一般有两种：

由 $\Gamma_1=\{\prod_{\lambda\in\Lambda}U_{\lambda}\mid U_{\lambda}\in\tau_{\lambda}\}$ 和 $\Gamma_2=\{\prod_{\lambda\in\Lambda}U_{\lambda}\mid U_{\lambda}\in\tau_{\lambda}$,且除去有限个 λ 外，$\mathrm{U}_{\lambda}=\mathrm{X}_{\lambda}\}$所生成。

3.2 乘积空间的性质

Th.1: 对于任意拓扑空间 Y 和映射 $f:Y\to X_1\times X_2$，f 连续 $\Leftrightarrow$ f 的分量都连续。

Col.：$\forall b\in X_2$, 由 $x\mapsto(x,b)$ 规定的映射 $j_b:X_1\to X_1\times X_2$ 是嵌入映射。

作业 P.34 ex.2