2008 年太原科技大学硕士研究生入学考试

数学分析（631）试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅立叶级数展开式为

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中的系数 b_3 的值为_________

2、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为

3、$\int\frac{\sec^2 x}{4+\tan^2 x}dx=$_________

4、$\int_{-2}^{2}\max[1,x^2]dx=$_________

5、$\int_L(x^2+y^2+2x)ds=$________，其中曲线 L 为 $x^2+y^2=R^2$.

二、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1、设 $z=x^3f(xy,\frac{y}{x})$，f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2、计算曲面积分 $\iint_\Sigma[(2x+z)dydz+zdxdy]$，其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角。

3、设 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2},x\in[-1,1]$，计算积分 $\int_0^x S(t)dt$ 。

4、将 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展成 x 的幂级数。

二、证明题（共90分）

1、（本题满分 25 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且

$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$, 证明:

(1) $\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使$f(\eta)=\eta$;

(2) $\forall\lambda,\exists\xi\in(0,\eta)$, 使$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

2、（本题满分 20 分）设$\{x_n\}$为单调递增数列。证明：若$\{x_n\}$存在聚点，则必是唯一的，且为$\{x_n\}$的上确界。

3、（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 为定义在区间(a,b)内的任一函数，记

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}, n=1,2,\cdots$$

证明：函数列$\{f_n(x)\}$在(a,b)内一致收敛于 $f(x)$.

4、（本题满分 15 分）证明: $f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内不一致连续.

5、（本题满分 15 分）（1）叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在的柯西准则;

（2）根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$不存在。