2012 年硕士研究生入学初试试题

科目代码：702　　科目名称：数学分析

注：(1) 本试题共 1 页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答，答在题签或草稿纸上一律无效。

一、求解下列问题（共 14 分，其中每小题 7 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^{2x})-2x}{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}$；　　2. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

二、设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$。　（14 分）

三、函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义，$f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}=0$，

证明：函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$。　（12 分）

四、设方程 $\begin{cases} e^x=3t^2+2t+1 \\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0 \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，其中 t 为参变量，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$。　（12 分）

五、设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\ln(1+x^4)$，$f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$。　（14 分）

六、设函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=3$，

如果 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\varphi'(1)$。　（12 分）

七、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。　（15 分）

八 设 $S_n(x)=(1+\dfrac{x}{n})^n$，则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上收敛于 $S(x)=e^x$。对于任意的正数 a，证明：

$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛。　（15 分）

九、计算 $\displaystyle\oiint_S \frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy$，其中 $r=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$，

S 为长方体 $V=\{(x,y,z)\mid |x|\le 2,|y|\le 3,|z|\le 4\}$ 的表面并取外侧。　（15 分）

十、曲面 $z=x^2+y^2$ 被 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到该椭圆的最长距离。．　（15 分）

十一、函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，证明：

$$\int_0^1|f(x)|dx\le\max\left(\int_0^1|f'(x)|dx,\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right)$$　（12 分）