§3.正项级数

每一项都是非负的级数称为正项级数.

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(u_{n\geq 0}, n=1,2,3\cdots\right)$ 的部分和为 s_n，显然部分和数列$\{s_n\}$为单调增加的，也就是

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots.$$

我们已经知道，如果这个数列具有上界，那么它的极限必存在. 如果这个数列没有上界，那么它发散到$+\infty$. 根据这一基本事实，我们便获得正项级数收敛基本定理.

基本定理　如果正项级数的部分和数列具有上界，则此级数收敛. 如果正项级数的部分和数列无上界，则此级数发散到 $+\infty$.

正项级数的比较判别法

若两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 之间成立着关系：存在常数 $c>0$

使 $$u_n \le cv_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

或者自某项以后（即存在N，当 $n>N$ 时）成立以上关系式，那么

（i）当级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛.

（ii）当级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 亦发散.

这个判别法是容易证明的．设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 U_n 和 V_n，于是成立着 $U_n \leq cV_n$，当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，V_n 为有界，故 U_n 亦必有界，得知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，U_n 无上界，于是 V_n 亦无上界，故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

比较判别法（极限形式）

给定两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,(0<l<+\infty)$$

那么这两个级数同时收敛或同时发散.

利用极限存在的定义，立即可证明此结论. 为此，取 $s=\frac{l}{2}$，则存在N，当$n>N$ 时成立着

$$\left(l-\frac{l}{2}\right)v_n<u_n<\left(l+\frac{l}{2}\right)v_n$$

再利用比较判别法，便证明了结论.

又当 $l=0$ 或 $l=+\infty$ 时的情形，请读者考虑.

柯西判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数．若从某一项起（即存在 N 当 $n>N$ 时）成立着 $\sqrt[n]{u_n} \le q < 1$（q 为某确定的常数），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．若从某一项成立着 $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

证明　若当$n > N$时成立$\sqrt[n]{u_n} \le q < 1$，那么有

$$u_n \le q^n$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \ (q<1)$是收敛的，再根据比较判别法得知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛．

若当$n > N$时成立$\sqrt[n]{u_n} \ge 1$，那么有　$u_n \ge 1$

因此级数的一般项U_n不趋于 0 ，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

柯西判别法（极限形式）

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，设 $r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}$

那么，当$r<1$ 时此级数必为收敛，当$r>1$时级数发散，而当 $r=1$ 时,此级数的是否收敛需进一步判定.

证明 （i）先证明当$r<1$时的情形.

由于$r<1$，总可选适当小的一个正数 ε_0 使 $r+\varepsilon_0<1$. 再按照上（下）极限的定理 1 ，在数列$\{u_n\}$中最多只有有限多个项其 n次根大于或等于$r+\varepsilon_0$，换句话说，存在正整数 N，当$r+\varepsilon_0$时有

$$\sqrt[n]{u_n}<r+\varepsilon_0<1$$

应用刚才已经证明的柯西判别法，这里$q=r+\varepsilon_0$. 立即得知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（ii）再证明$r>1$时的情形.

再由$r>1$，总可选适当小的一个正数ε_0使$r-\varepsilon_0>1$. 再按照§1上（下）极限定理 1 ，在数列中将有无穷多个项，它的n 次根大于或等于$r-\varepsilon_0$，换句话说，将有无穷多个如此的u_n（记它们 $u_{n_k}(k=1,2,3,\cdots)$ ）使得

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项u_n 必不趋于0,因此此级数发散.

(iii)最后考虑 $r=1$ 时的情形.

为了表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性尚需要进一步判定,例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

这两个级数的r 都等于1,但前者发散,后者收敛.

达朗贝尔判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数莫若从某一项起成立着 $\frac{u_n}{u_{n-1}} \le q < 1$ (q 为确定的数, $n > N$)则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,若从某一项起 $\frac{u_n}{u_{n-1}} \ge 1 (n > N)$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

达朗贝尔判别法(极限形式)

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,当 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\bar{r}<1$

时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\underline{r}>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

而当 $\bar{r}=1$ 或者 $\underline{r}=1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性要进

一步判定

柯西积分判别法

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,设$\{u_n\}$为单调减少的数列,作一个连续的单调减少的正值函数 $f(x)(x>0)$,使得当 x 等于正整数 n 时,其函数值恰为u_n ,亦即 $f(n)=u_n$.那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列$\{A_n\}$,这里 $A_n=\int_1^n f(x)dx$,同为收敛或同为发散.

证明　由于

$$u_{k-1}=\int_{k-1}^{k} u_{k-1}dx \geq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \int_{k-1}^{k} u_k dx = u_k$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n} u_{k-1}=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} u_{k-1}dx \geq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n} u_k$$

由此即得证明.

例 1　判定级数 $\lim\limits_{n=1} \sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

例2　判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n}(\alpha>0)$ 的敛散性.

例3　考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{n^{s}}(s>0,\alpha>0)$ 的敛散性.

例4　考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n}(x \geq 0)$ 的敛散性.

例5　考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 的敛散性$(p>0)$ 这个级数通常称为 $\boldsymbol{p}$ 级数

例6　证明级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散,级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{2}}$ 收敛