§4.任意项级数

一 绝对收敛和条件收敛

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,如果其每一项加上绝对值后所组成的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数.如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 却是收敛的,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛.

条件收敛的级数是存在的,例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 就是一个条件收敛级数

定理 绝对收敛级数必为收敛级数.但反之不然.

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛,也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.按照柯西收敛原则,对于任意 $\varepsilon > 0$,存在 N,当 $n > N$ 时,对于一切正整数 p 成立着

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

再对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 应用柯西收敛原理,由于

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

根据柯西收敛原理,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛.

定理的第二个论断:反之不然,可以由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 得知.

从定义可见,判别一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是否绝对收敛,实际就是判别一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的收敛性.但注意,当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 为发散时,只能判定$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$非绝对收敛,而不能判定它必为发散.我们判断出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$为发散时,还得进一步重新判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性,若它为收敛,就是条件收敛.

二　交错级数

凡正负项相间的级数,也就是形如

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots$$

的级数,其中 $u_n > 0(n = 1,2,3,\cdots)$,称 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 为交错级数

莱布尼茨定理　如果一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的项满足以下两个条件:

(i) 单调减少 $u_{n+1} \le u_n (n = 1,2,3,\cdots);$

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$

则 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛

2. 它的余和 r_n 的符号与余和第一项的符号相同,并且余和的绝对值不超过余和的第一项的绝对值: $|r_n| \le u_{n+1}.$

龙岩学院 LONGYAN UNIVERSITY

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的部分和为 s_n ,现在考察由偶数个项所组成的部分和数列 $\{S_{2m}\}$ 及由奇数个项所组成的部分和数列 $\{S_{2m+1}\}$

对于偶数个项的部分和数列 $\{S_{2m}\}$有

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})$$

$$S_{2m+2}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})+(u_{2m+1}-u_{2m+2})$$

由定理的条件(i),即对一切 n 成立 $u_{n-1}-u_n\geq 0$,所以数列 $\{S_{2m}\}$ 为单调增加的数列.另一方面

$$S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}\leq u_1$$

可见数列 $\{S_{2m}\}$是有界的.按照单调有界数列必有极限的定理,数列$\{S_{2m}\}$ 极限存在 $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$

对于奇数个项的部分和数列 $\{S_{2m+1}\}$ 有 $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$

再由定理的条件(ii),得到 $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1}=\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}+\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1}=S$

证明了对数列$\{S_n\}$ 而言,它的两个子列$\{S_{2m}\}$ 及 $\{S_{2m+1}\}$ 都收敛于 S ,不难证明数列 $\{S_n\}$ 本身亦应收敛于S .

龍巖學院 LONGYAN UNIVERSITY

对于莱布尼茨型的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 必有

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \le u_1$$

同样的,对于形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ 的级数,只要上式乘上一个的因子,就得到

$$-u_1 \le \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \le 0$$

获得一个重要的事实:莱布尼茨型的级数,其和的符号与这个级数的第一项的符号相同,其和的绝对值将不超过第一项的绝对值.

第二个论断:因为莱布尼茨型级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的余和

$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_n$ 也是一个莱布尼茨型级数,所以余和 r_n 的符号与余和的第一项的符号相同.并且 $|r_n|\le u_{n+1}$

三　阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

阿贝尔变换　对下面的和数

$$S=\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot b_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m,$$

阿贝尔给出了一个初等的变换.设:

$$B_1=b_1, B_2=b_1+b_2, B_3=b_1+b_2+b_3,\cdots,\quad B_m=b_1+b_2+\cdots+b_m,$$

于是 $b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, b_3 = B_3 - B_2, \cdots, b_m = B_m - B_{m-1}$

这样,就可以把和数 S 写为

$$S = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

$$= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + a_3 (B_3 - B_2) + \cdots + a_m (B_m - B_{m-1})$$

$$= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \cdots + (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_m B_m,$$

这个变换式 $$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_m B_m,$$

就是阿贝尔变换.

阿贝尔引理　如果

(i) $\{a_i\}(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为单调的；

(ii) $\{B_i\}(i=1,2,3,\cdots,m)$有界，$|B_i|\le M$，

则
$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right|\le M\left(|a_1|+2|a_m|\right)$$

证明　利用阿贝尔变换

$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right|\le\sum_{i=1}^{m-1}|a_i-a_{i+1}|\cdot|B_i|+|a_mB_m|$$

由于每一个 $a_i-a_{i+1}(i=1,2,3,\cdots,m-1)$都是同号的，

$|B_i|\le M(i=1,2,3,\cdots,m)$ 于是有

$$|S|\le M\cdot\left|\sum_{i=1}^{m}(a_i-a_{i+1})\right|+M\cdot|a_m|\le M\left(|a_1|+2|a_m|\right)$$

直接利用阿贝尔变换又可得到下面的推论

推论　如果 $a_i \geq 0(i=1,2,3,\cdots,m), a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_m$,

那么　$|S| \leq Ma_1$.

阿贝尔判别法　如果

(i)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;

(ii)数列 $\{a_n\}$ 单调有界，$|a_n| \leq K(n=1,2,3,\cdots)$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明　利用阿贝尔引理来估计和数

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i}$$

由条件(i),级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$是收敛的,按照柯西收敛原理,对任何$\varepsilon > 0$,存在N,使当$n > N$时,对不论怎样的正整数p,成立

$$\left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right| < \varepsilon$$

因而,可以取这个ε为引理中提到的数M,于是当$n > N$时,对任何正整数m,应用引理,有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| \le \varepsilon \left(\left| a_{n+1} \right| + 2 \left| a_{n+m} \right| \right) \le 3 K \varepsilon$$

这样便证明了级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

狄利克雷判别法

如果(i)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和 B_n 有界, $|B_n| \le M\,(n=1,2,3,\cdots)$,

(ii)数列 $\{a_n\}$ 单调趋于0,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明　仍旧应用阿贝尔引理来估计和数 $\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k$.由条件 $(ii) a_n \to 0 (n \to \infty)$, ,则对任何给定正数 ε ,存在 N ,当 $n > N$ 时,有 $|a_n| < \varepsilon$ 　此外,由于条件(i),显然有

$$\left|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}\right| = \left|B_{n+p} - B_n\right| \le 2M$$

于是引理中的数 M 就是这里的 $2M$,所以当 $n > N$ 时,对任何正整数 m 成立 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \le 2M\left(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|\right) < 6M \cdot \varepsilon$

这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的收敛性.

龙岩学院 LONGYAN UNIVERSITY

例1　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} x^n \ (x>0)$ 的敛散性.

例2　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}(s>0)$

例3　考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}(s>0,\alpha>0)$

例4　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nu_n}{n+1}$ 都收敛.

例5　若数列 $\{a_n\}$ 单调趋于0,那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

前者对任何 x 都收敛,后者对任何 $x \neq 2k\pi$ 都收敛.而当 $x = 2k\pi$ 时,需根据 a_n 的性质进一步判别之.