级数敛散性判断研究式教学案例

问题 1：已知二发散级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的各项不为负数，问下列二级数的敛散性如何？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$

解：(1)可能收敛也可能发散。如：$a_n = \frac{1}{n}$，$b_n = \frac{2}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$发散；

$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$，$b_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$一定发散，因为$\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\} \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$。

问题 2：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^2$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$、$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$也收敛。

解：利用平均不等式即可。

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n{}^2 + b_n{}^2}{2}$；$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n{}^2 + \frac{1}{n^2} \right)$。

以下假定$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数。

问题 3：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$的敛散性如何？

解：收敛。因$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$，故$\exists k_0 \in \mathbb{Z}^+$，使得$\forall k \geq k_0$，有$0 \leq a_k < 1$。从而$0 \leq a_k{}^2 < a_k$，由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$收敛。

问题 4：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$的敛散性如何？

解：收敛。（同问题 2）

问题 5：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$的敛散性如何？

解：收敛。利用平均不等式即可。

问题 6：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$的敛散性如何？

解：$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \dfrac{\sqrt[n]{a_1(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \le \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k$。

由 Stirling 公式$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 \le \theta_n \le 1)$知

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$，于是$\sqrt[n]{n!}$与$\dfrac{1}{n}$同阶。令$b_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k a_k$，则

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right)$

由于$\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots$与$\dfrac{1}{n}$同阶，所以$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$等价与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$。

注：判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$的敛散性，其中$\alpha > 0$为常数。

解： 利用$Stirling$公式$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$,其中$0 \le \theta_n \le 1$。

因$(n!)^{\frac{\alpha}{n}} = \left(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\right)^{\frac{\alpha}{n}} = n^{\alpha} (2\pi)^{\frac{\alpha}{2n}} n^{\frac{\alpha}{2n}} e^{-\alpha+\frac{\theta_n}{12n^2}\alpha}$，而

$(2\pi)^{\frac{\alpha}{2n}} n^{\frac{\alpha}{2n}} e^{-\alpha+\frac{\theta_n}{12n^2}\alpha} \to \dfrac{1}{e^{\alpha}}$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$与$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$有相同的敛散性。

因此，原级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$当$\alpha > 1$时，级数收敛，当$0 < \alpha \le 1$时，级数发散。

问题 7：已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$能否用$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$控制？即是否存在常数$C$使得$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le C \sum_{n=1}^{\infty} a_n$。

解：$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\dfrac{\sqrt[n]{a_1(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\le\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$。关键是对$\sqrt[n]{n!}$的下界作估计。

$e^{n+1}>\dfrac{(n+1)^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(n+1)^n}{n!}+\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}>e\dfrac{(n+1)^n}{n!}$，于是$\sqrt[n]{n!}>\dfrac{n+1}{e}$。

用于上式得到

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k<e\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

上式两边对n求和得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k=e\sum_{n=1}^{\infty}a_n。$$

问题 8：问题 7 能否改进成$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le e\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\omega_n)a_n$？

见参考文献《数学教育学报》2003 年第二期。