

中国科学院研究生院

2007 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：概率论与数理统计

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

1. (15 分) 考虑如下游戏：有三个外观一样的盒子，标号分别为 1, 2, 3。第 i 号盒中有 i 个白球和一个黑球， $i = 1, 2, 3$ 。现在甲将 3 个盒子的标号盖住并混在一起，然后任选一个盒子，从中随机拿出一个球给乙看，如果乙猜中这个球来自哪个盒子，就能获奖。如果球是白色的，乙应该猜它是来自哪个盒子？此时乙获奖的概率为多少？

2. (每小题 10 分，共 30 分)

现有一副扑克牌，去掉二张王牌，剩下 52 张，其中 26 张是红色图案的，26 张是黑色图案的。从这 52 张牌取 3 张，请计算下列事件的概率：

- (a) 第一张牌是红色的，第二张是黑色的；
- (b) 三张被抽的牌中恰好有一张是红色的；
- (c) 三张牌中至少有一张是红色的。

3. (每小题 10 分，共 20 分)

- (a) 设 X_i 服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布， $i = 1, 2, 3$, $\sigma > 0$ 。 X_1, X_2 和 X_3 相互独立。用 $\Phi(x)$ 表示标准正态随机变量的分布函数。试用 $\Phi(x)$ 写出下列事件的概率的表达式： $\{X_1 + X_2 + X_3 > 3\sigma\}$
- (b) 设 Y_1, Y_2 和 Y_3 相互独立且均服从参数为 λ 的 Poisson 分布（泊松分布）试求事件 $\{Y_1 + Y_2 + Y_3 = 3\}$ 的概率。

4. (题(a) 10 分，题(b) 5 分，共 15 分)

设学生考试分数服从正态分布，现有 n 位同学的分数为 x_1, x_2, \dots, x_n 。根据去年考试分数的统计，平均分数为 m 。

- (a) 假设已知方差是 σ^2 ，请设计一个检验问题，根据你的设计，在什么情况下，可以认为今年成绩提高了？假定检验水平为 α 。
- (b) 若方差未知，则如何解决上述问题？

5. (每小题 10 分，共 20 分)

设 X_1, \dots, X_n 为一个独立同分布样本。它们均服从 $[0, \theta]$ ($\theta > 0$) 上的均匀分布。

- (a) 试求 θ 的极大似然估计。
- (b) 试证上述估计不是无偏的。

6. (每小题 15 分, 共 30 分)

(a) 设 X_1, \dots, X_n 独立且每个 X_i 服从参数为 λ_i 的指数分布, 即密度函数为 $f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$,

$x \geq 0$, 试求 $\min_{1 \leq i \leq n} X_i$ 和 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ 的分布。

(b) 有一个由线路 I 与线路 II 并联而成的电路。线路 I 又由电阻 A, B, C 串联而成, 线路 II 由电阻 D, E 串联而成。电阻 A, C 的寿命服从参数为 0.3 指数分布, 电阻 B 的寿命服从参数为 0.4 指数分布, D, E 则服从参数为 0.1 指数分布, 试求这一线路的寿命的期望值。

7. (题(a) 12 分, 题(b) 8 分, 共 20 分)

设平面上有无数条距离为 1 的等距平行线, 随机地向平面投掷一根长度为 $L(L \leq 1)$ 的针。

假定针的中心与最靠近它的平行线之间的距离 X 服从 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的均匀分布, 针与最近的平

行线之间的夹角 φ 服从 $[0, \pi]$ 上的均匀分布。

(a) 求针与线相交的概率;

(b) 假设作 n 次投针实验, 其中针与线相交的次数为 $m (m \leq n)$, 当 n 充分大时, 问能否根据 m 与 n 写出圆周率 π 的近似估计值? 为什么?