第二章　动态规划
（Dynamic Programming）

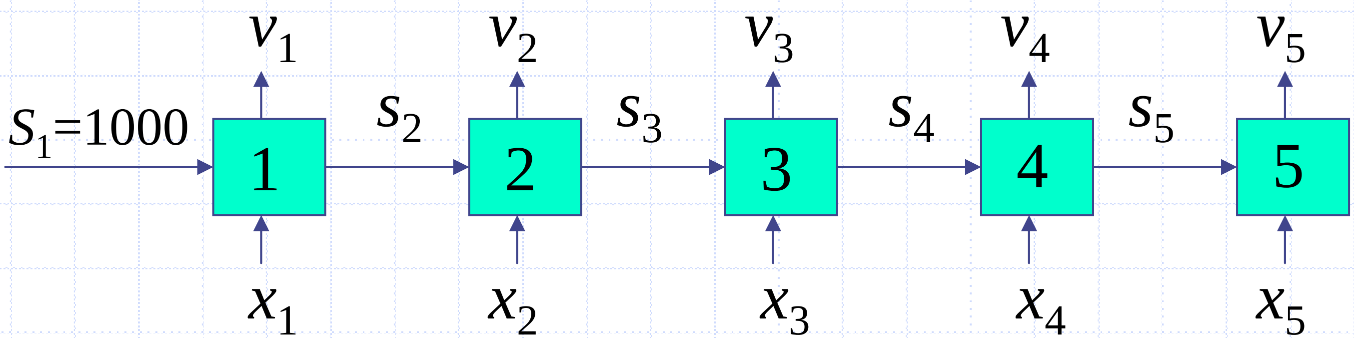
2.1 动态规划的基本概念与方法

2.2 动态规划应用举例

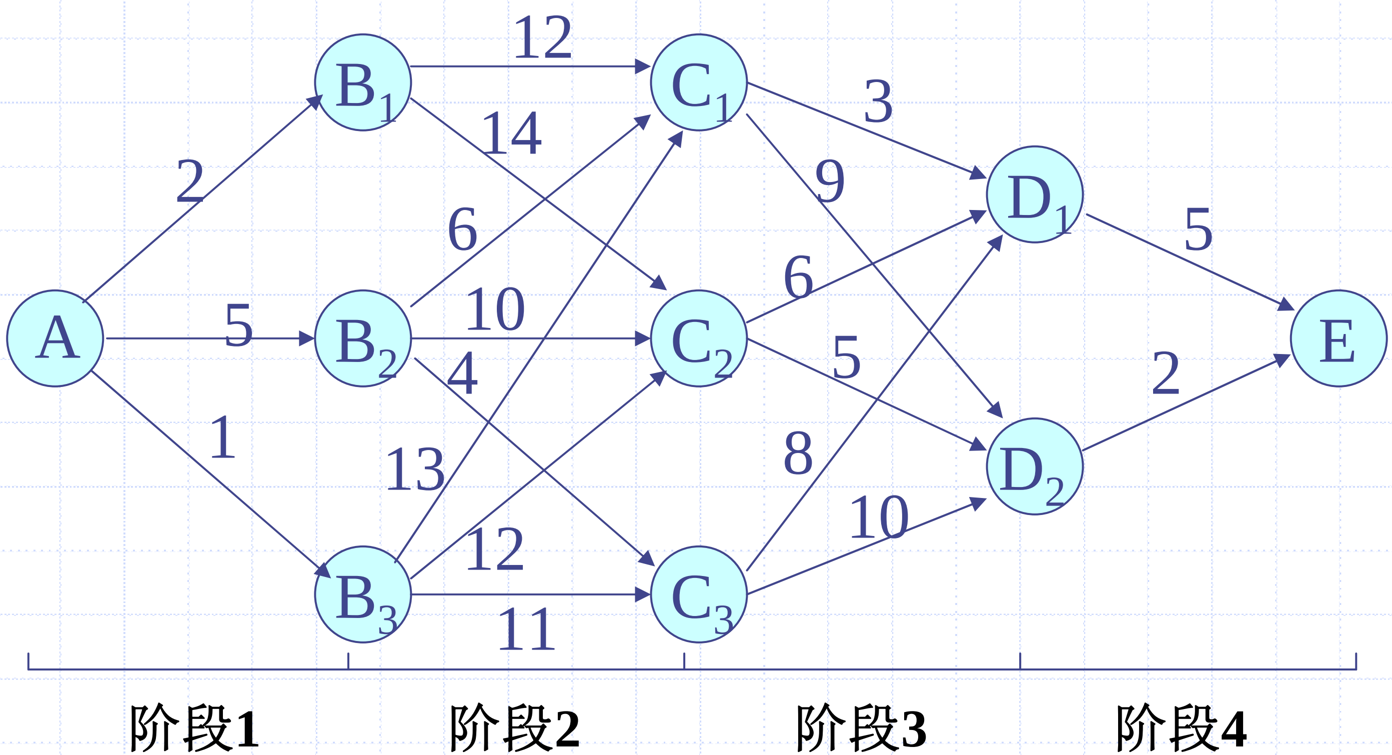
2.1 动态规划的基本概念与方法

一、多阶段决策问题举例

1. 时间阶段例子(生产负荷问题)某种机器可以在高、低两种负荷下进行生产。高负荷年产量8，年完好率0.7；低负荷年产量5，年完好率0.9。现有完好机器1000台，需制定一个5年计划，以决定每年安排多少台机器投入高、低负荷生产，使5年的总产量最大。



2.空间阶段的例子（最短路问题）如图为一线路网络。现要从A点铺设一条管道到E点，图中两点间连线上数字表示两点间距离。现需选一条由A到E的铺管线路，使总距离最短。



二、基本概念与方程

1、基本概念

阶段——分步求解的过程，用阶段变量k表示，k=1，…，n

状态——每阶段初可能的情形或位置，用状态变量S_k表示。 动态规划中的状态应具有无后效性。

决策——每阶段状态确定后的抉择，即从该状态演变到下阶段某状态的选择，用决策变量x_k表示。

状态转移——由S_k转变为S_{k+1}的规律，记$S_{k+1}=T(S_k, x_k)$。

策略——由各阶段决策组成的序列，记$P_{1n}=\{x_1, \ldots, x_n\}$，称$P_{kn}=\{x_k, \ldots, x_n\}$为阶段$k$至$n$的后部子策略。

阶段指标——每阶段选定决策x_k后所产生的效益，记

$$v_k= v_k(S_k, x_k)。$$

指标函数——各阶段的总效益，记相应于P_{kn}的指标函数

$$为\ v_{kn}= v_{kn}(S_k, P_{kn})。$$

其中最优的称**最优指标函数**，记$f_k = f_k(S_k) = \text{opt}\ v_{kn}$。

问题：动态规划的最优解和最优值各是什么？

——最优解：最优策略P_{1n}，

最优值：最优指标f_1。

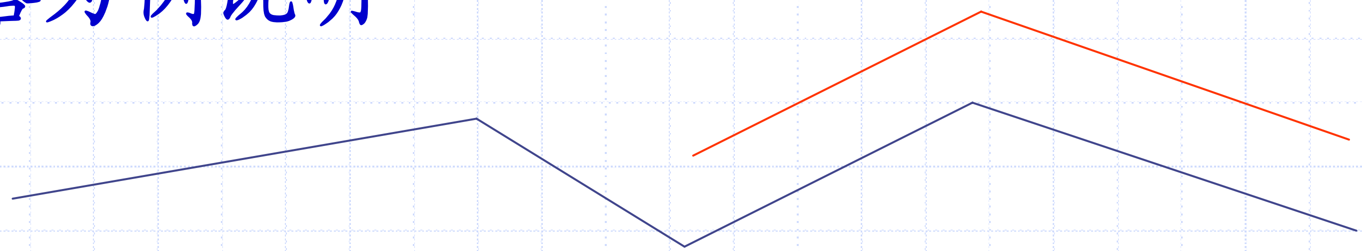
2、基本方程

（1）基本原理

定理：$P_{1n}^{*}=(x_1^{*},\cdots,x_n^{*})$是最优策略$\Leftrightarrow$对任何$k$（$1<k<n$）和允许状态$s_1$，有$f_1=\underset{p_{1k}}{opt}\{v_{1k}+f_{k+1}\}$。

推论（ Bellman 最优性原理）：若 P_{1n}^{*}是最优策略，则对任何 k（$1<k<n$），子策略 P_{kn}^{*}对于以 s_k^{*}为起点的k至n子过程来说必为最优策略。

以最短路为例说明



（2）基本方程

根据最优性原理，可建立从后向前逆推求解的递推公式——基本方程：

$$\begin{cases} f_k = \underset{x_k}{opt}\{v_k + f_{k+1}\} \\ f_{n+1} = 0, \quad k = n, \cdots, 1 \end{cases}$$

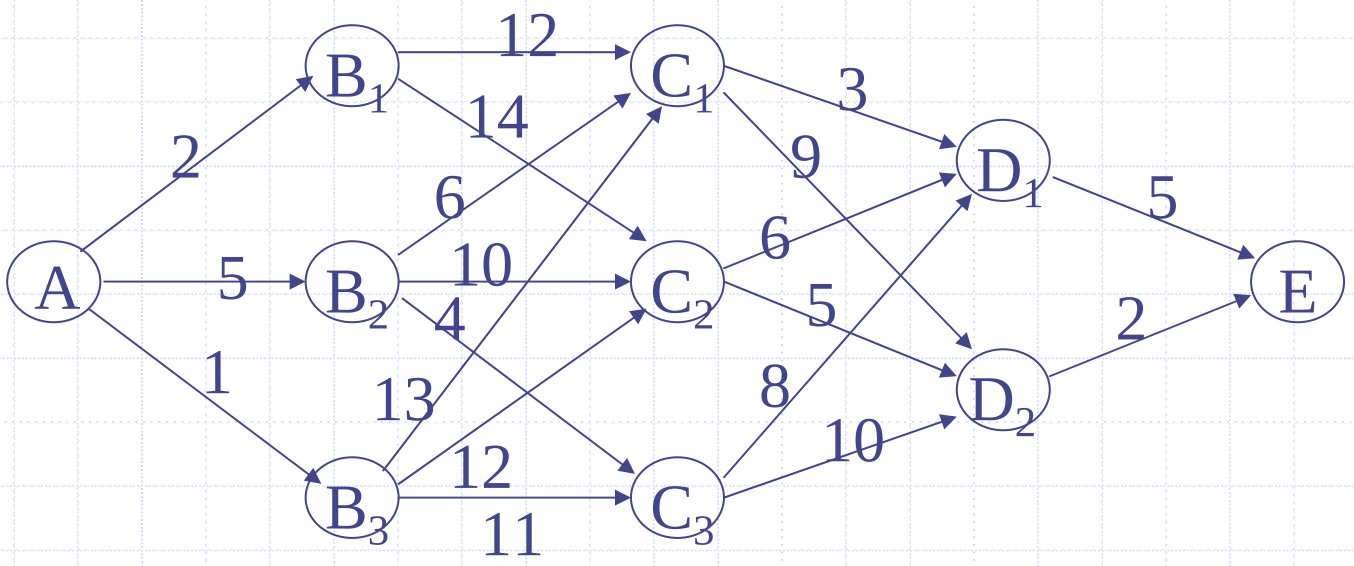
◆动态规划求解的一般步骤:

- ◆确定过程的分段，构造状态变量;
- ◆设置决策变量，写出状态转移;
- ◆列出阶段指标和指标函数;
- ◆写出基本方程，由此逐段递推求解。

三、求解方法

1. 离散型（用表格方式求解）

例**1** 用动态规划方法求解前面的最短路问题



解：设阶段k=1，2，3，4依次表示4个阶段选路的过程;

状态s_k表示k阶段初可能处的位置;

决策x_k表示k阶段初可能选择的路;

阶段指标v_k表示k阶段与所选择的路段相应的路长;

指标函数 $v_{k4} = \sum_{i=k}^{4} v_i$ 表示k至4阶段的总路长;

递推公式：$f_k = Min\{v_k + f_{k+1}\}$

$f_5 = 0, \quad k = 4, \cdots, 1$

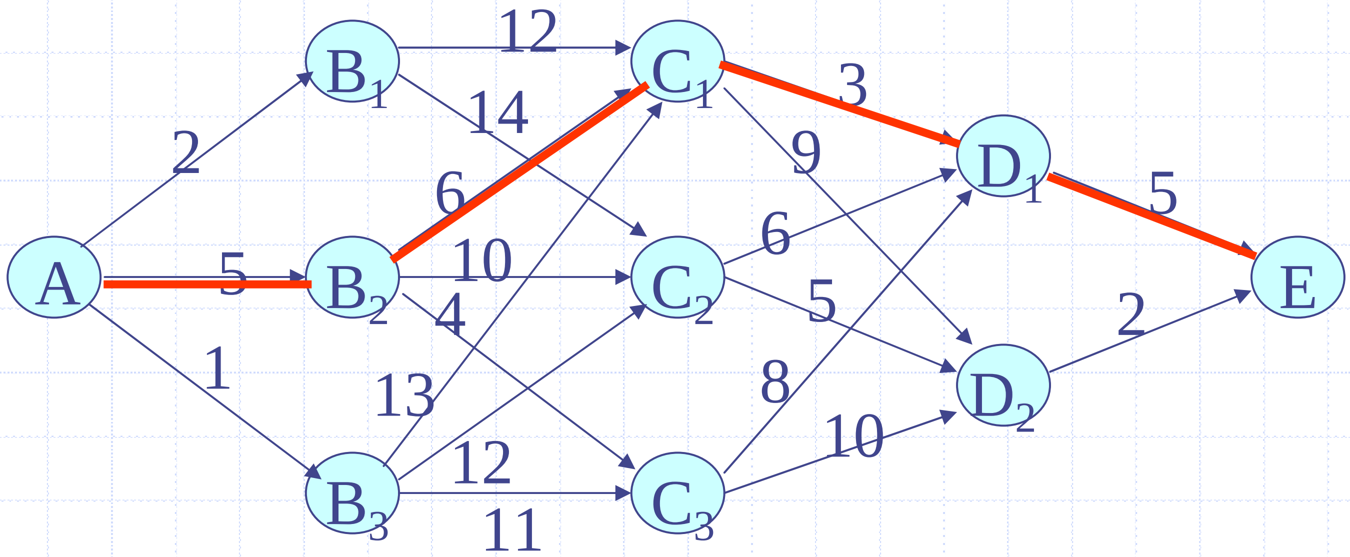
k	S_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	P_{kn}^*
4	D_1	E	5	5+0	5	D_1E
	D_2	E	2	2+0	2	D_2E
3	C_1	D_1	3	3+5	8	C_1D_1E
		D_2	9	9+2		
	C_2	D_1	6	6+5	7	C_2D_2E
		D_2	5	5+2		
	C_3	D_1	8	8+5	12	C_3D_2E
		D_2	10	10+2		

k	S_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	P_{kn}^*
2	B_1	C_1	12	$12+8$	20	$B_1C_1D_1E$
		C_2	14	$14+7$		
	B_2	C_1	6	$6+8$	14	$B_2C_1D_1E$
		C_2	10	$10+7$		
		C_3	4	$4+12$		
	B_3	C_1	13	$13+8$	19	$B_3C_2D_2E$
		C_2	12	$12+7$		
		C_3	11	$11+12$		

k	S_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	P_{kn}^*
1	A	B_1	2	$2+20$	19	$AB_2C_1D_1E$
		B_2	5	$5+14$		
		B_3	1	$1+19$		

$P^*_{14}=AB_2C_1D_1E$ → （最短路）

$f_1 = 19$ → （最短距）



$P^*_{14}=AB_2C_1D_1E$（最短路）

$f_1 = 19$（最短距）

2.连续型（用公式递推求解）

例2用动态规划方法求解前面的机器负荷问题

某种机器可以在高、低两种负荷下进行生产。高负荷年产量8，年完好率0.7；低负荷年产量5，年完好率0.9。现有完好机器1000台，需制定一个5年计划，以决定每年安排多少台机器投入高、低负荷生产，使5年的总产量最大。

解：设阶段k=1，…，5表示第k年安排机器的过程；

状态s_k表示第k年初的完好机器台数；

决策x_k表示第k年投入高负荷的机器台数；则投入低负荷的台数为s_k-x_k；

状态转移$s_{k+1}=0.7x_k+0.9(s_k-x_k)$；

阶段指标：$V_k=8x_k+5(S_k-x_k)$；

指标函数：$$V_{k5}=\sum_{i=k}^{5}V_i$$

基本方程：$$\begin{cases} f_k=\max\{V_k+f_{k+1}\} & k=5,\cdots,1 \\ f_6=0 \end{cases}$$

K=5

$$f_5 = \max_{0 \le x_5 \le S_5} \{V_5 + f_6\} = \max_{0 \le x_5 \le S_5} \{8x_5 + 5(S_5 - x_5)\}$$

$$= \max_{0 \le x_5 \le S_5} \{3x_5 + 5S_5\}$$

$$\therefore x_5^* = S_5,\ f_5 = 8S_5$$

K=4

$$f_4 = \max_{0 \le x_4 \le S_4} \{V_4 + f_5\} = \max_{0 \le x_4 \le S_4} \{8x_4 + 5(S_4 - x_4) + 8S_5\}$$

$$= \max_{0 \le x_4 \le S_4} \{3x_4 + 5S_4 + 8[0.7x_4 + 0.9(S_4 - x_4)]\}$$

$$= \max_{0 \le x_4 \le S_4} \{1.4x_4 + 12.2S_4\} \quad \therefore x_4^* = S_4,\ f_4 = 13.6S_4$$

同理:

K=3

$$f_3 = \max\{V_3 + f_4\} = \max_{0 \le x_3 \le S_3} \{0.28x_3 + 17.24S_3\}$$

$$\therefore x_3^* = S_3,\ f_3 = 17.52S_3$$

K=2

$$f_2 = \max\{V_2 + f_3\} = \max_{0 \le x_2 \le S_2} \{-0.5x_2 + 20.8S_2\}$$

$$\therefore x_2^* = 0,\ f_2 = 20.8S_2$$

K=1

$$f_1 = \max\{V_1 + f_2\} = \max_{0 \le x_1 \le S_1} \{-1.16x_1 + 23.72S_1\}$$

$$\therefore x_1^* = 0,\ f_1 = 23.72S_1 = 23720$$

故最优计划为:

年份	1	2	3	4	5
高负荷	0	0	810	567	397
低负荷	1000	900	0	0	0

总产量: 23720

2.2 动态规划应用举例

一、资源分配问题

1. 问题的一般提法

设有某种资源，总数量为a，用于生产n种产品；若分配数量x_i用于生产第i种产品，其收益为$g_i(x_i)$。问应如何分配，可使总收益最大？

2. 数学规划模型

决策变量： 设分配给第i种产品的资源数量为x_i

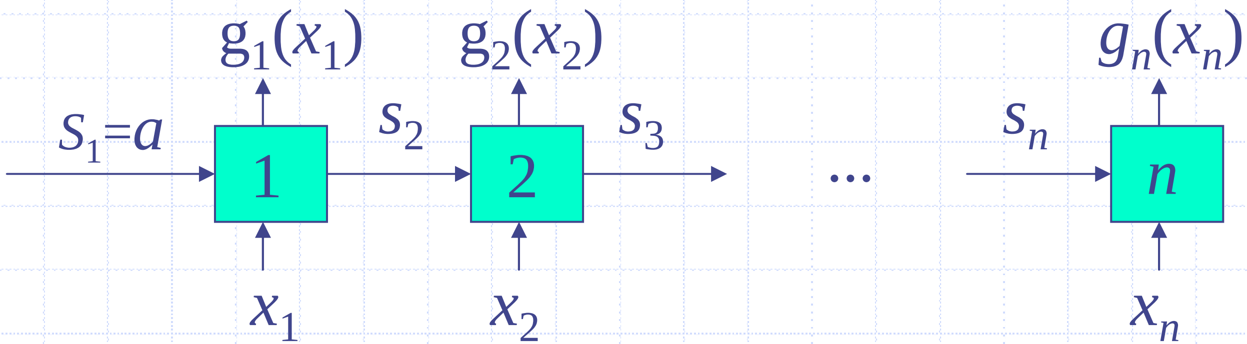
目标函数： $Maxz=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_i)$

约束条件： $\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=a\\ x_i\geq 0, i=1,\cdots,n\end{cases}$

模型的特点

——变量分离。

3.用动态规划方法求解



阶段*k* =1, …, *n*表示把资源分配给第*k*种产品的过程;

状态s_k表示在给第*k*种产品分配之前还剩有的资源量;

决策x_k表示分配给第*k*种产品的资源量;

状态转移s_{k+1} $= s_k - x_k$;

阶段指标v_k $= g_k(x_k)$;

指标函数v_{kn} $= \sum_{i=k}^{n} g_i(x_i)$;

基本方程 $$\begin{cases} f_k = \underset{x_k}{Max}\left\{ v_k + f_{k+1} \right\} \\ f_{n+1} = 0, k = n, \cdots, 1 \end{cases}$$

例3 某公司拟将某种高效设备5台分配给所属甲、乙、丙3厂。各厂获此设备后可产生的效益如下表。问应如何分配，可使所产生的总效益最大?

效益 厂 设备台数	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

解：阶段k =1,2,3依次表示把设备分配给甲、乙、丙厂的过程

状态s_k 表示在第k阶段初还剩有的可分台数；

决策x_k 表示第k阶段分配的设备台数；

状态转移$s_{k+1} = s_k - x_k$；

阶段指标v_k 表示第k阶段分配后产生的效益；

指标函数$v_{k3} = \sum_{i=k}^{3} v_i(x_i)$；

$$\text{基本方程}\begin{cases} f_k = \underset{x_k}{Max}\{v_k + f_{k+1}\} \\ f_4 = 0,\ k = 3,2,1 \end{cases}$$

效益 厂 / 设备台数	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

k	S_k	x_k	v_k	v_k+f_{k+1}	f_k	P_{kn}^*
3	0	0	0	0+0	0	0
	1	1	4	4+0	4	1
	2	2	6	6+0	6	2
	3	3	11	11+0	11	3
	4	4	12	12+0	12	4
	5	5	12	12+0	12	5

k	S_k	x_k	v_k	v_k+f_{k+1}	f_k	P_{kn}^*
2	0	0	0	0+0	0	0-0
	1	0	0	0+4	5	1-0
		1	5	5+0		
	2	0	0	0+6	10	2-0
		1	5	5+4		
		2	10	10+0		
	3	0	0	0+11	14	2-1
		1	5	5+6		
		2	10	10+4		
		3	11	11+0		
	4	0	0	0+12	16	1-3
		1	5	5+11		2-2
		2	10	10+6		
		3	11	11+4		
		4	11	11+0		
	5	0	0	0+12	21	2-3
		1	5	5+12		
		2	10	10+11		
		3	11	11+6		
		4	11	11+4		
		5	11	11+0		

k	S_k	x_k	v_k	v_k+f_{k+1}	f_k	P_{kn}^*
1	5	0 1 2 3 4 5	0 3 7 9 12 13	0+21 3+16 7+14 9+10 12+5 13+0	21	0-2-3 2-2-1

最优策略：P^*_{13} 为0-2-3或2-2-1，

即分给甲厂0台、分给乙厂2台、分给丙厂3台，

或分给甲厂2台、分给乙厂2台、分给丙厂1台。

最优值： f_1=21。

可见，最优解可以是不唯一的，但最优值是唯一的。

资源分配问题的应用很广泛，例如:

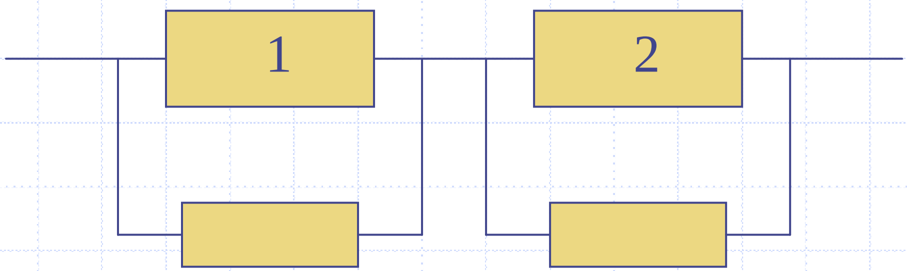
1. 某学生正在备考4门功课，还剩7天时间，每门功课至少复习1天。若他已估计出各门功课的复习天数与能提高的分数之间的关系，问他应怎样安排复习时间可使总的分数提高最多?

2. 背包问题：旅行者携带的背包中能装的物品重量为a，现他要从n种物品中挑选若干数量装入背包，问他应如何挑选可使所带的物品总价值最大?

二、复合系统工作可靠性问题

1、问题描述：设某工作系统由n个部件串接而成，为提高系统的可靠性，在每个部件上装有备用件。已知部件i上装有x_i个备用件时，其正常工作的概率为$p_i(x_i)$；每个部件i的备用件重量为w_i，系统要求总重量不超过W。问应如何安排备用件可使系统可靠性最高？

串接:



2. 数学规划模型

决策变量： 设给第i个部件安排x_i个备用件

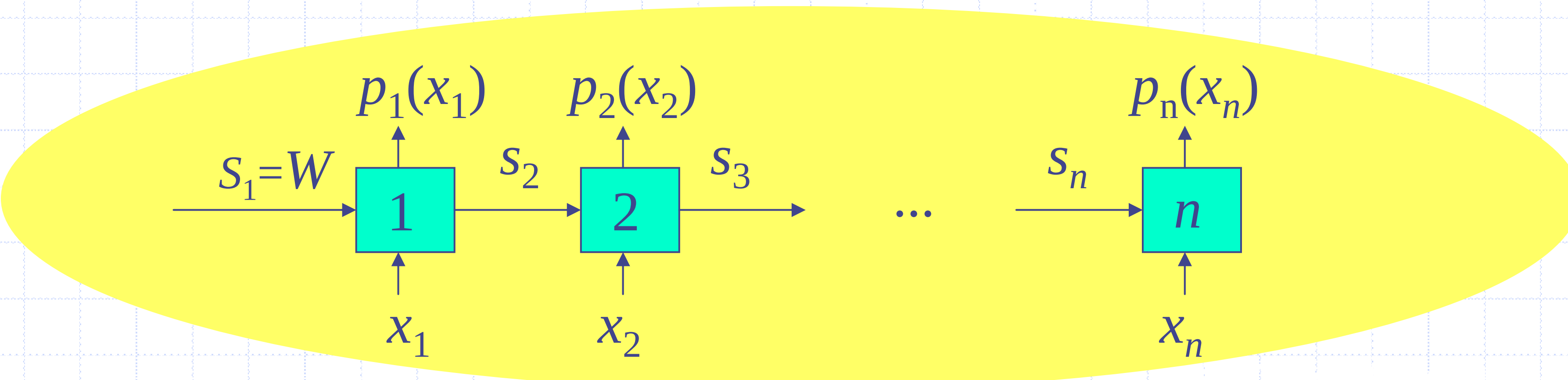
目标函数： $Max z = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$

约束条件： $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ x_i \text{为非负整数} \end{cases}$

模型的特点

——变量分离。

3.用动态规划方法求解



3. 用动态规划法求解

阶段：k=1, …, n；表示给第k部件安排备用件的过程；

状态S_k： 第k-n部件的容许总重量

决策x_k：第k部件安排的备用件个数；

状态转移方程：$S_{k+1}= S_k-W_k x_k$；

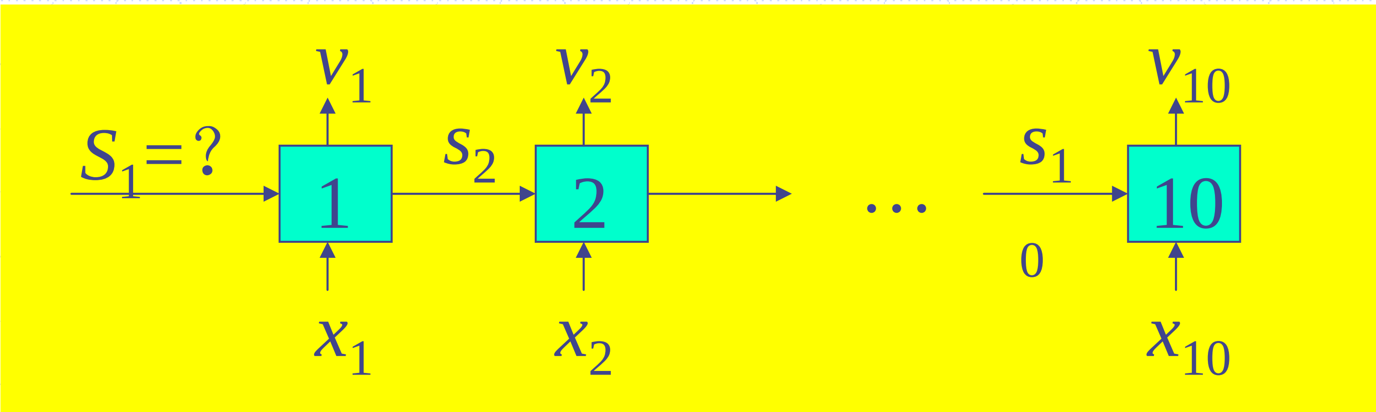
阶段指标：$V_k= P_k(x_k)$； 指标函数：$V_{kn}=\prod_{i=k}^{n} V_i$

基本方程：
$$\begin{cases} f_k = \max\{V_k \bullet f_{k+1}\} & k=n,\cdots,1 \\ f_{n+1}=1 \end{cases}$$

三、设备更新问题

某运输公司购进一批卡车投入运营，公司每年初需对卡车作出更新或继续使用的决定。假设第k年中，$r_k(t_k)$表示车龄为t_k的车使用一年的收入，$u_k(t_k)$表示车龄为t_k的车使用一年的维修费用，$c_k(t_k)$表示车龄为t_k的车更新成新车的费用。现公司需制定一个10年计划，以决定如何安排使10年的总收入最大。

问题：状态和决策怎样设置？



阶段k = 1, ..., 10表示第k年的决策过程;

状态s_k = t_k表示第k年的车龄;

决策$x_k = \begin{cases} 1, & 第k年更新 \\ 0, & 第k年不更新 \end{cases}$

状态转移t_{k+1} = $t_k(1-x_k)$ +1

阶段指标v_k = $r_k[t_k(1-x_k)] - u_k[t_k(1-x_k)] - x_k\ c_k(t_k)$

指标函数v_{kn} $= \sum_{i=k}^{10} v_i$;

基本方程$\begin{cases} f_k = \underset{x_k \in \{0,1\}}{Max}\{v_k + f_{k+1}\} \\ f_{11} = 0, k = 10, \cdots, 1 \end{cases}$

P209页例
9.6

四、其他——随机型问题举例

某瓷厂接受订制一个瓷瓶的任务。瓷瓶用电炉烧制。据技术分析估计，每个瓷瓶出炉后的合格率为0.5，各瓶合格与否相互独立（即一炉如装有n个瓷瓶，那么出炉后都不合的概率为0.5^n）。制造一个瓷瓶的原料费为100元，烧一炉的费用为300元。现因厂中条件限制最多只能烧3炉，每炉最多装4个瓷瓶。若3炉的瓷瓶无1个合格，则因不能履行合同而被罚款1600元。试用动态规划方法确定一种生产方案（即每炉该装几个瓷瓶），使总的期望成本为最小。