高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A
JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第1期 Vol.14 No.1 1999

广义的Arrow-Barankin-Blackwell定理

卢占禹

摘要 本文首先引进了凸锥广义基的概念，然后将局部凸空间的Arrow-Barankin-Blackwell定理推广到序凸锥为非点式锥的情况.
关键词 局部凸空间，广义基，非点式锥，有效点，正真有效点.
分类号 (中图)O224； (1991MR)52A07.

THE GENERALIZED ARROW－BARANKIN－BLACKWELL THEOREM

Lu Zhanyu
(Mathematics Teaching and Research Section,Engineering College of Transportation,Tianjin 300161)

Abstract In this paper, the concept of generalized base for the convex cone in locally convex space is defined,then the theorem of Arrow－Barankin－Blackwell is extended to the nonpointed ordered convex cone with the generalized base.
Keywords Locally Convex Space,Generalized Base,Nonpointed Ordered Cone,Efficient Point,Positive Proper Efficient Point.
Subject Classification (CL)O224;(1991MR)52A07.

1 引言及基本概念

设X为局部凸空间，X^*为X的对偶空间，$C\subseteq X$为闭凸锥，记L_C为C的线空间，即$L_C=C\cap(C)$，$C^*=\{f\in X^*|f(x)\geq 0, \forall x\in C\}$，$C^\#=\{f\in C^*|f(x)>0, \forall x\in C\setminus L_C\}$.

定义1 设$A\subseteq X$，$A\neq\varnothing$.称$x^*\in A$为A的有效点，如果$(x^*-C)\cap A\subseteq x^*+C$.记A的有效点集为$E(A/C)$.

定义2 设$A\subseteq X$，$A\neq\varnothing$.称$x^*\in A$为A的真有效点，如果$\exists$X中包含C的非平凡凸锥D，s.t.$C\setminus L_C\subseteq \mathrm{int}(D)$且$x^*\in E(A/D)$，即$(x^*-D)\cap A\subseteq x^*+D$.其中$\mathrm{int}(\cdot)$表示集合的拓扑内部.记A的真有效点集为$PrE(A/C)$.

定义3 设$A\subseteq X$，$A\neq\varnothing$.称$x^*\in A$为A的正真有效点，如果$\exists f\in C^\#$，s.t.$f(x^*)=\min\{f(x)|x\in A\}$.记A的正真有效点集为$PsE(A/C)$.

易证：$PrE(A/C)\subseteq E(A/C)$,$PsE(A/C)\subseteq E(A/C)$，但反之未必成立.

显然，当C为点式锥，即$L_C=\{0\}$时，定义1～定义3与通常的有效点，真有效点，正真有效点一致(见文献［1］).

定义4 凸集$B\subseteq C$称为凸锥C的基，如果$0\notin \mathrm{cl}(B)$且$C=\mathrm{Cone}(B)$.其中$\mathrm{cl}(\cdot)$表示集合的闭包，$\mathrm{Cone}(\cdot)$表示集合的生成锥.

定义5 凸集$B\subseteq C$称为C的广义基，如果$0\notin \mathrm{cl}(B+L_C)$且$\forall x\in C\setminus L_C$均$\exists b\in B$与$\lambda>0$ s.t. $x\in\lambda b+L_C$.

显然，当C为点式锥时，定义4与定义5一致.

对于X为有限维空间R^n且C为非负锥R^n_+的情形，Arrow,Barankin与Blackwell于1953年在文献［2］中证明了下面的定理：对每个紧凸集$A\subseteq R^n$，其正真有效点集在有效点集中稠密，即

$$E(A/C)\subseteq \mathrm{cl}(PsE(A/C))\quad(1)$$

这一定理通常称为Arrow-Barankin-Blackwell稠密性定理，简称为稠密性定理.三十多年来，有许多学

者从事于将稠密性定理推广到赋范线性空间去的工作.例如Salz,Bitran,Borwein,Jahn等(见文献［3～6］).他们都在一定条件下证明了稠密性定理，而他们所设条件的共同特征是：闭凸锥C具有有界基.1991年傅万涛教授考虑了闭凸锥C只要有基的情况，证明了下面结论：在赋范线性空间中，为了使稠密性定理成立，即(1)式成立，当且仅当闭凸锥C具有基.从而完全解决了关于稠密性定理在赋范线性空间中的推广问题(见文献［7］).随后他又于1992年将他的结果推广到局部凸空间(见文献［8］).注意到凸锥C有基时，C必为点式锥.故迄今为止，有关稠密性定理的结论均是针对点式锥的.本文的目的，就是将［8］中结果再推广到闭凸锥为非点式锥的情况，得到了广义的稠密性定理.

本文的主要结论是：设X为局部凸空间，C为X的闭凸锥，则要使得对任一紧凸集$A\subseteq X$有$E(A/C)\subseteq E(A/C)\cap cl(PsE(A/C))+L_C$成立，当且仅当C有广义基.

显然，当C为点式锥时，这一结论就是［8］中的结论，即局部凸空间中的稠密性定理.

2　主要结果

在集合$\{x+L_C|x\in X\}$上规定加法：$(x+L_C)+(y+L_C)\triangleq(x+y)+L_C$，数乘$\lambda(x+L_C)\triangleq\lambda x+L_C$，且规定$(x+L_C)=(y+L_C)\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}x-y\in L_C$，则$\{x+L_C|x\in X\}$构成线性空间，称为X相对于$L_C$的商空间，记为$X/L_C$.

设φ_C为映射X到X/L_C上的典则映射，即$x\xrightarrow{\varphi_C}x+L_C$，且在$X/L_C$上规定拓扑$\tau_Q\triangleq\{\varphi_C(V)|V\in\tau\}$，其中$\tau$为X的拓扑，则$X/L_C$也是局部凸空间，此时$\varphi_C$是连续的线性映射.由C的闭性知，$X/L_C$还是Hausdorff空间(见文献［9］).

对于$E\subseteq X$，记$\tilde{E}$为$\varphi_C(E)$，即$\tilde{E}=\{x+L_C|x\in E\}$，$\forall x\in X$，记$\tilde{x}$为$\varphi_C(x)$，即$x\in X$，记$\tilde{x}=x+L_C$.

对于拓扑空间Y，我们总以N(Y)表示Y的零点的邻域构成的集合.

引理1　若E为的X凸子集(锥)，则$\tilde{E}$为X/L_C中的凸集(锥).

证　(略).

引理2　设$E\subseteq X$，若$E+L_C$为闭集，则$\tilde{E}$也为闭集.

证　设$\{\tilde{E}_\alpha|\alpha\in I\}$为$\tilde{E}$中的网，不妨设$\tilde{x}_\alpha=x_\alpha+L_C$，$x_\alpha\in E$，$\forall\alpha\in I$,且$\tilde{x}_\alpha\to\tilde{x}$.则$\forall$　$U\in N(X)$，$\exists$ $\alpha_U\in I$，s.t. $\tilde{x}_{\alpha_U}-\tilde{x}\in\varphi_C(U)$，所以　$l_U\in L_C$ s.t. $\tilde{x}_{\alpha_U}-l_U-x\in U$，即　$E+L_C$中的网$\{x_{\alpha_U}-l_U|U\in N(Z)\}$ s.t. $x_{\alpha_U}-l_U\to x$.所以由$E+L_C$为闭集知，$x\in E+L_C$，从而$\tilde{x}\in\tilde{E}$.所以$\tilde{E}$为闭集.

引理3　$\tilde{C}$为X/L_C中的点式闭凸锥.

证　因为$C+L_C=C$，又C为闭集，所以由引理1与引理2知，$\tilde{C}$为闭凸锥.

若$\tilde{E}\in\tilde{C}\cap(-\tilde{C})$，则　$c_1,c_2\in C$以及$l_1,l_2\in L_C$ s.t. $x=c_1+l_1=-c_2+l_2$，所以$c_1=c_1+c_2-c_2\in-C$,所以$c_1\in L_C$.所以$\tilde{x}=\tilde{0}$.即$\tilde{C}$为点式锥.

引理4　设$E\subseteq X$，若$int(E+L_C)\neq\varnothing$，则$int(\tilde{O})\neq\varnothing$　.

证　设$x\in int(E+L_C)$，则$\exists U\in N(X)$,s.t. $x+U\in E+L_C$，所以$\tilde{x}+\varphi_C(U)\subseteq\tilde{E}$.而$\varphi_C(U)\in N(X/L_C)$，所以$\tilde{x}\in int(\tilde{E})$.

推论　若$E\subseteq X,int(E)\neq\varnothing$　，则$int(\tilde{E})\neq\varnothing$.

引理5　设$A\subseteq X$，$A\neq\varnothing$.若$x^*\in E(A/C)$则$\tilde{x}^*\in E(\tilde{A}/\tilde{C})$.反之若$\tilde{x}^*\in E(\tilde{A}/\tilde{C})$，则$A\cap\tilde{E}^*\subseteq E(A/C)$.

证　设$x^*\in E(A/C)$.由于$\tilde{C}$为点式凸锥，所以$\tilde{x}^*\in E(\tilde{A}/\tilde{C})\Leftrightarrow(\tilde{x}^*-\tilde{C})\cap\tilde{A}=\{\tilde{x}^*\}$.

若$\tilde{x}^*\notin E(\tilde{A}/\tilde{C})$，则$\exists x\in A$ s.t. $\tilde{x}=x+L_C\in\tilde{x}^*-\tilde{C}$，且$x-x^*\notin L_C$.由$\tilde{x}-\tilde{x}^*\in-\tilde{C}$可得$x-x^*\in-C$，从而由$x^*\in E(A/C)$可得$x-x^*\in C$，所以$x-x^*\in L_C$(矛盾).所以$\tilde{x}^*\in E(\tilde{A}/\tilde{C})$.

反过来，设$\tilde{x}^*\in E(\tilde{A}/\tilde{C})$，且$\bar{x}\in A\cap\tilde{x}^*$.若$\bar{x}\notin E(A/C)$，则$\exists x\in(\bar{x}-C)\cap A$ s.t. $x\notin\bar{x}+C$.由于$x-\bar{x}\notin L_C$，所以$\bar{x}\neq\tilde{\bar{x}}$.而由$x-\bar{x}\in-C$知$\bar{x}-\tilde{\bar{x}}\in-\tilde{C}$.又$x\in A$，故$\tilde{x}\in\tilde{A}$，这又与$\tilde{\bar{x}}=\tilde{x}^*\in E(\tilde{A}/\tilde{C})$矛盾.所以$\bar{x}\in E(A/C)$.

推论　$E(A/C)\neq\varnothing\Leftrightarrow E(\tilde{A}/\tilde{C})\neq\varnothing$.

引理6　设$A\subseteq X$，$A\neq\varnothing$.若$x^*\in PrE(A/C)$,则$\tilde{x}^*\in PrE(\tilde{A}/\tilde{C})$.反之若$\tilde{x}^*\in PrE(\tilde{A}/\tilde{C})$，则$A\cap$

$\tilde{x}^* \subseteq PrE(A/C)$.

证　设$x^* \in PrE(A/C)$，由定义$\exists$包含C的非平凡凸锥D，s.t. $C \setminus L_C$　$int(D)$且$x^* \in E(A/D)$.

由引理4之证明知，$\tilde{C} \setminus \{\tilde{0}\} \subseteq int(\tilde{D})$. 下证$\tilde{x}^* \in E(\tilde{A}/\tilde{D})$. 否则$\exists \tilde{x} \in (\tilde{x}^* - \tilde{D}) \cap \tilde{A}$，s.t. $\tilde{x} \notin \tilde{x}^* + \tilde{D}$. 不妨设$\tilde{x} = x + L_C$, $x \in A$. 则由$\tilde{x} \notin \tilde{x}^* + \tilde{D}$知$x - x^* \notin D$. 而由$\tilde{x} \in \tilde{x}^* - \tilde{D}$知$x - x^* \in -D$. 这又与$x^* \in E(A/D)$矛盾. 所以$\tilde{x}^* \in E(\tilde{A}/\tilde{D})$.

所以$\tilde{x}^* \in PrE(\tilde{A}/\tilde{C})$.

反过来设$\tilde{x}^* \in PrE(\tilde{A}/\tilde{C})$且$\bar{x} \in A \cap \tilde{x}^*$. 由于$\exists X/L_C$中包含$\tilde{C}$的非平凡凸锥$\tilde{D}$ s.t. $\tilde{C} \setminus \{\tilde{0}\} \subseteq int(\tilde{D})$且$\tilde{x}^* \in E(\tilde{A}/\tilde{D})$. 令$D = \varphi^{-1}_C(D) = \{x \in X | \varphi_C(x) \in \tilde{D}\}$，易证D为包含C的非平凡凸锥，且由$\varphi_C$的连续性知，$C \setminus L_C \subseteq int(D)$.

下证：$\bar{x} \in E(A/D)$否则$\exists x \in (\bar{x} - D) \cap A$ s.t. $x \notin \tilde{x} + D$，这样便有$\tilde{x} \in (\tilde{x}^* - \tilde{D}) \cap \tilde{A}$且$\tilde{x} \notin \tilde{x}^* + \tilde{D}$. 这又与$\tilde{x}^* \in E(\tilde{A}/\tilde{D})$矛盾. 所以$\bar{x} \in E(A/D)$.

所以$\bar{x} \in PrE(A/C)$.

推论　$PrE(A/C) \neq \varnothing \Leftrightarrow PrE(\tilde{A}/\tilde{C}) \neq \varnothing$.

引理7　若B为C的广义基，则$\tilde{B}$为$\tilde{C}$的基.

证　因B是C的凸子集，故由引理1，$\tilde{B}$也是$\tilde{C}$的凸子集. 又由$0 \notin cl(B + L_C)$知，$\tilde{0} \notin cl(\tilde{B})$. 因若$\tilde{0} \in cl(\tilde{B})$则$\exists$网$\{\tilde{b}_\alpha | \alpha \in I\} \subseteq \tilde{B}$ s.t. $\tilde{b}_\alpha \to \tilde{0}$. 所以$\forall U \in N(X)$，$\exists b_{\alpha_U}$以及$l_U \in L_C$ s.t. $b_{\alpha_U} + l_U \in U$，所以$\tilde{0} \in cl(B + L_C)$，矛盾. 所以$\tilde{0} \notin cl(□)$. 又对$\forall \tilde{x} \in \tilde{C} \setminus \{\tilde{0}\}$，因为$x \in C \setminus L_C$，所以$\exists b \in B$以及$\lambda > 0$ s.t. $x \in \lambda b + L_C$，所以$\tilde{x} = \lambda \tilde{b}$. 所以□是$\tilde{C}$的基.

引理8　若A为X中的紧集，则$\tilde{A}$也为X/L_C中的紧集.

证　(略).

引理9　设Y为局部凸空间，D为Y中的闭凸锥且具有基，则对任一紧凸集$A \subseteq Y$，其真有效点集在有效点集中稠密. 即$E(A/D) \subseteq cl(PrE(A/D))$.

证　见文献［10］.

引理10　设C为X的闭凸锥且具有广义基B，则对任一紧凸集$A \subseteq X$有：$E(A/C) \subseteq E(A/C) \cap cl(PrE(A/C)) + L_C$，即$\forall x^* \in E(A/C)$均$\exists \bar{x} \in E(A/C)$以及$l \in L_C$ s.t. $x^* = \bar{x} + l$ 且$\bar{x} \in cl(PrE(A/C))$.

证　设$x^* \in E(A/C)$，则由引理5　$\tilde{x}^* \in E(\tilde{A}/\tilde{C})$，由引理3与引理7，$\tilde{C}$为点式闭凸锥且具有基，又由引理8，$\tilde{A}$为$X/L_C$中的紧凸集由引理9，$\exists$网$\{\tilde{x}^*_\alpha | \alpha \in I\}$　$PrE(\tilde{A}/\tilde{C})$ s.t. $\tilde{x}_\alpha \to \tilde{x}^*$. 不妨设$\tilde{x}_\alpha = x_\alpha + L_C$，$x_\alpha \in A$，$\forall \alpha \in I$，则由引理6，$x_\alpha \in PrE(A/C)$, $\forall \alpha \in I$. 由于A为紧集，故可设$x_\alpha \to \bar{x} \in A$. 由$\varphi_C$的连续性，$\tilde{x}_\alpha \to \tilde{\bar{x}}$. 因为$X/L_C$为Hausdorff局部凸空间，故有$\tilde{\bar{x}} = \tilde{x}^*$. 所以$\exists l \in L_C$ s.t. $x^* = \bar{x} + l$. 又由于$\bar{x} \in A \cap \tilde{x}^*$，所以$\bar{x} \in E(A/C)$.

引理11　凸锥C具有广义基的充要条件是$C^\# \neq \varnothing$.

证　充分性　设$f \in C^\#$，则$\forall x \in C \setminus L_C$，$f(x) > 0$. 令$B = \{x \in C | f(x) = 1\}$，显然B为C的凸子集，且由f在$L_C$上恒为零以及f的连续性知，$0 \notin cl(B + L_C)$. 又$\forall x \in C \setminus L_C$，令$b = x/f(x)$，$\lambda = f(x)$，则$\lambda > 0$，$b \in B$且$x = \lambda b \in \lambda b + L_C$. 所以B为C的广义基.

必要性　设B为C的广义基，则$0 \notin cl(B + L_C)$. 由于$B + L_C$为凸集，故由凸集分离定理知，$\exists f^* \in X^*$ s.t. $f^*(b) + f^*(l) > 0$，$\forall b \in B, l \in L_C$, 由此易得：$f^*(l) = 0$，$\forall l \in L_C$ 且$f^*(b) > 0$，$\forall b \in B$.

$\forall x \in C \setminus L_C$，由于　$\lambda > 0$与$b \in B$ s.t. $x \in \lambda b + L_C$，$f(x) = \lambda f(b) > 0$，所以$f^* \in C^\#$.

引理12　$x^* \in PsE(A/C) \Leftrightarrow x^* \in PrE(A/C)$.

证　设$x^*\in PsE(A/C)$，则　$f^*\in C^\#$ s.t. $f^*(x^*)\leqslant f(x)$，$\forall x\in A$.

令$D=\{x\in X|f^*(x)\geqslant 0\}$，显然D为包含C的非平凡凸锥，且由$f^*$的连续性易证$C\setminus L_C\subseteq int(D)$.下证$x^*\in E(A/D)$.否则　$\exists\bar{x}\in(x^*-D)\cap A$ s.t. $\bar{x}\notin x^*+D$.所以$\bar{x}-x^*\notin D\cap(-D)$.由于$\bar{x}-x^*\in -D$，所以$f^*(\bar{x}-x^*)<0$，即$f(\bar{x})<f(x^*)$，矛盾.所以$x^*\in E(A/D)$.

所以$x^*\in PrE(A/C)$.

反过来，设$x^*\in PrE(A/C)$，则$\exists$包含C的非平凡凸锥D，s.t. $C\setminus L_C\subseteq int(D)$且$x^*\in E(A/D)$.易证$x^*\in E(A+D/D)$.

令$L_D=D\cap(-D)$且设φ_D为映射X到X/L_D上的典则映射，则由引理5知，$\varphi_D(x^*)\in E(\varphi_D(A+D)/\varphi_D D(D))$.又由$int(D)\neq\varnothing$知$int(\varphi_D(D))\neq\varnothing$.由文献［11］之定理5.4知，$\exists\tilde{f}^*\in(Z/L_D)^*\setminus\{0\}$，s.t. $\tilde{f}^*\circ\varphi_D(x^*)\leqslant\tilde{f}^*\circ\varphi_D(x)+\tilde{f}^*\circ\varphi_D(d),\forall x\in A,d\in D.$ 令 $f^*=\tilde{f}^*\circ$ 则$f^*\in X^*$，且

$$f^*(x^*)\leqslant f^*(x)+f^*(d)\quad\forall x\in A,d\in D.\tag{2}$$

由(2)式，$f^*\in D^*=\{f\in X^*|f(x)\geqslant 0,\forall x\in D\}$，且由于$int(D)=\{x\in D|f(x)>0,\forall f\in D^*\setminus\{0\}\}$(见文献［11］之定理3.2.1(b))，所以$f^*\in C^\#$.在(2)式中令d=0则$f^*(x^*)\leqslant f^*(x)$，$\forall x\in A$.

所以$x^*\in PsE(A/C)$.

定理(广义Arrow-Barankin-Blackwell定理)　设X为局部凸空间，C为X的闭凸锥，则为使$E(A/C)\subseteq E(A/C)\cap cl(PsE(A/C))+L_C$对任一紧凸集$A\subseteq X$成立，当且仅当C有广义基.

证明　充分性是引理10与引理12的直接推论.下证必要性.

取紧凸集$A\subseteq X$，$A\neq\varnothing$，则$\tilde{A}$亦为X/L_C中的紧凸集，故由通常的有效点存在定理知，$E(\tilde{A}/\tilde{C})\neq\varnothing$，从而由引理5之推论知$E(A/C)\neq\varnothing$.取$x^*\in E(A/C)$，则$\exists\bar{x}\in E(A/C)$以及$l\in L_C$ s.t. $x^*=\bar{x}+l$且$\bar{x}\in cl(PsE(A/C))$,所以$PsE(A/C)\neq\varnothing$，从而$C^\#\neq\varnothing$.所以由引理11知，C具有广义基.

(本文作者通讯地址：天津市解放军运输工程学院数学教研室　邮编　300161)

江西省自然科学基金资助项目.

作者单位：卢占禹　(解放军运输工程学院数学教研室)

参考文献

1　Luc,D.T.,Theory of vector optimization,Lecture Notes in Econom.and Math.Systems,Vol 319,Springer－Verlag,Berlin,1989.

2　Arrow,K.J.,Barankin,E.W.,Blackwell,D.,Admissible points of convex sets,In:H.W.Kuhn and A.W.Tucher,eds.,Contributions to the Theory of Games,Princeton University Press,Princeton,NJ,1953.

3　Salz,W.,Eine topologische Eigenschaft der effizienten Punkte Konvexer Mengen,Oper.Res.Verfahren,1976,23:197～202.

4　Bitran,G.R., Magnanti,T.L.,The structure of admissible points with respect to cone dominance,J.Optim.Theory Appl.,1979,29:573～614.

5　Borwein,J.M.,The Geometry of Pareto efficiency over cones,Math.Operationsforsch.Statist.Ser.Optim.,1980,11:235～248.

6　Jahn,J.,A generalization of a theorem of Arrow－Barankin－Blackwell,SIAM J.Control Optim.,1988,26:999～1005.

7　Fu,W.T.,On a problem of Arrow,Barankin and Blackwell,OR and decision making,Vol.Ⅱ,Chengdu University of Science and Technology Press,1992.

8　傅万涛，关于Arrow－Barankin－Blackwell定理的一点注记，系统科学与数学，1994，14(2)：146～149.

9　夏道行，严绍宗等，泛函分析第二教程，高等教育出版社，北京，1987.

10　Fu,W.T.,On the Density of Proper Efficient Points,Proceeding of the American Mathematical Society,Vol 124,April 1996.

11 Jahn, J., Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces, Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main, 1986.

收稿：1997-09-03. 修回：1998-01-19.