高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第2期 Vol.14 No.2 1999

非自治竞争Lotka-Volterra系统的持续生存和全局稳定

滕志东 陈兰荪

摘 要 本文研究一般n个种群竞争的非自治Lotka-Volterra系统.得到了系统一致持续生存和全局渐近稳定的新的判别准则.这些准则推广了现有有关文献中的一些结果.
关键词 非自治Lotka-Volterra系统，竞争系统，一致持续生存，全局渐近稳定，正周期解.
分类号 (中图)O175.13；(1991MR)34D20，92D25.

NONAUTONOMOUS COMPETITIVE LOTKA-VOLTERRA SYSTEMS

Teng Zhidong
Dept. of Math., Xinjiang University, Urumqi 830046
Chen Lansun
Institute of Mathematics, Academia, Sinica, Beijing 100080

Abstract In this paper, the general n-species nonautonomous competitive Lotka-Volterra systems are studied. Some new criteria about uniform persistence and globally asymptotical stability of positive solutions are established. These criteria extend some previous results.
Keywords Nonautonomous Lotka-Volterra System, Competition System, Uniform Persistence, Globally Asymptotical Stability, Positive Periodic Solution.
Subject Classification (CL)O175.13;(1991MR)34D20,92D25.

1 引 言

考虑一般n个种群竞争的非自治Lotka-Volterra系统：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = x_i(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j), \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

这里$x_i \geqslant 0(i=1,2,\ldots,n)$,$t \in R_+ := [0,+\infty)$,函数$b_i(t)$和$a_{ij}(t)(i,j=1,2,\ldots,n)$在$R_+$上有定义，有界和连续，并且在本文中始终要求$a_{ij}(t) \geqslant 0$对$t \in R_+$和$i,j=1,2,\ldots,n$.

根据系统(1)的生态学意义，本文考虑它的所有正解.称系统(1)的解$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$为正解，如果在其最大存在区间上有$x_i(t)>0(i=1,2,\ldots,n)$.关于系统(1)的定性性质的研究已经有了许多很好的工作，例如：在系统(1)为周期竞争的情形下，[1]中的推论2.6，[2]中的定理3.1，[3]中的定理0.1，[4]中的定理3和[5]中的定理0.1分别建立了不同形式的关于正周期解的存在性和全局渐近稳定性的判别准则.在系统(1)为一般非自治竞争情形时，[6]中的定理3.2，[5]中的推论4.4和[7]中的定理1分别给出了关于具有正的上，下界的解的存在性和全局渐近稳定性的判别准则.本文的目的是对系统(1)的一致持续生存性和全局渐近稳定性建立新的判别准则.下面将看到，这些新的判别准则将上述文献［1～7］中所得到的一些结果做了统一的处理和很好的推广.

关于系统(1)的一致持续生存性和全局渐近稳定性的定义叙述如下.称系统(1)是一致持续生存的，如果存在正常数δ和Δ，使得对于系统(1)的任何正解$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$都有T>0，当$t \geqslant T$时有$\delta \leqslant x_i(t) \leqslant \Delta(i=1,2,\ldots,n)$.称系统(1)是全局渐近稳定的，如果对于它的任何正解x (t)都有：a)x (t)在Liapunov意义下稳定，b)对于系统(1)的任何其它正解x(t)有x(t)-x (t)→0当t→∞时.

2　一致持续生存性

考虑系统(1)的一维子系统：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=x_i(b_i(t)-a_{ij}(t)x_i),\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}. \tag{2}$$

这是众所周知的Bernoulli方程.设$x_i(t)$是其满足初始条件$x_i(0)=x_{i0}$的解.不难得到$x_i(t)$是系统(2)的正解的充分必要条件为$x_{i0}>0$,并且正解$x_i(t)$有表达式：

$$x_i^{-1}(t)=e^{-\int_0^t b_i(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(x_{i0}^{-1}+\int_0^t a_{ii}(s)e^{\int_0^s b_i(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right),$$

系统(2)的定性性质已经在许多文献中被研究，例如［5，8，9］.下面的结论是易证的.

引理1　若存在正常数ω_i和λ_i使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\omega_i}b_i(\tau)\mathrm{d}\tau>0,\ \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda_i}a_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau>0,$$

则(2)的任何正解$x_i^*(t)$在$[0,\infty)$上有定义和正的上，下界，并且是全局渐近稳定的.

下面叙述和证明本节的主要结果.

定理1　若存在正常数ω_i和λ_i($i=1,2,\ldots,n$)使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda_i}a_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau>0,\ \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\omega_i}\left(b_i(\tau)-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(\tau)x_{j0}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau>0,$$

对$i=1,2,\ldots,n$，这里$x_{i0}(t)$为系统(2)的某个正解，则系统(1)是一致持续生存的.

证　由于$\liminf\limits_{t\to\infty}\int_t^{t+\omega_i}b_i(\tau)\mathrm{d}\tau>0$,得知引理1的全部条件成立.设$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$是系统(1)的任何正解，对任何$i\in\{1,2,\ldots,n\}$,由于

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=x_i(t)\left(b_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)\right)\leqslant x_i(t)(b_i(t)-a_{ii}(t)x_i(t)),\text{对 }t\geqslant 0,$$

根据微分不等式定理得到$x_i(t)\leqslant u_i(t)$对$t\geqslant 0$，这里$u_i(t)$是(2)满足初始条件$u_i(0)\geqslant x_i(0)$的正解.因此由引理1得到，解$x(t)$在$[0,\infty)$上有定义，并且对任何充分小的$\varepsilon>0$存在足够大的$T_1>0$使得

$$x_i(t)\leqslant x_{i0}(t)+\varepsilon, \tag{3}$$

对$t\geqslant T_1$和$i=1,2,\ldots,n$.选取$\Delta=\sup\{x_{i0}(t)+\varepsilon:t\geqslant 0,i=1,2,\ldots,n\}$,则$\Delta<+\infty$，并且不依赖于系统(1)的任何正解，于是有

$$x_i(t)\leqslant\Delta\text{对 }t\geqslant T_1,i=1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

选取充分小$\varepsilon>0$和$T_2\geqslant T_1$使得

$$\int_t^{t+\omega_i}\left(b_i(\tau)-a_{ii}(\tau)\varepsilon-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(\tau)(x_{j0}(\tau)+\varepsilon)\right)\mathrm{d}\tau>\varepsilon$$

对$t\geqslant T_2$和$i=1,2,\ldots$，n.若$x_i(t)\leqslant\varepsilon$对一切$t\geqslant T_2$,则由(3)式得知当$t\geqslant T_2$时

$$x_i(t)=x_i(T_2)\exp\int_{T_2}^{t}(b_i(\tau)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tau)x_j(\tau))\mathrm{d}\tau\geqslant$$
$$x_i(T_2)\exp\int_{T_2}^{t}(b_i(\tau)-a_{ii}(\tau)\varepsilon-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(\tau)(x_{j0}(\tau)+\varepsilon))\mathrm{d}\tau.$$

由于$\int_{T_2}^{\infty}(b_i(t)-a_{ii}(t)\varepsilon-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(t)(x_{j0}(t)+\varepsilon))\mathrm{d}t=+\infty$,故$x_i(t)\to+\infty$当$t\to\infty$时，但这是矛盾的.因此，存在$t_i>T_2$使得$x_i(t_i)>\varepsilon$.若又存在$t_0>t_i$使得$x_i(t_0)<\varepsilon\exp(-\beta_i\omega_i)$,这里

$$\beta_i=\sup\{|b_i(t)-a_{ii}(t)\varepsilon-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(t)(x_{j0}(t)+\varepsilon)|:t\in[0,\infty)\},$$

显然$0<\beta_i<\infty$,则存在$t_1\in(t_i,t_0)$使得$x_i(t_1)=\varepsilon$，并且$x_i(t)<\varepsilon$对$t\in(t_1,t_0]$.选取整数$p\geqslant 0$使得$t_0\in(t_1+p\omega_i,t_1+(p+1)\omega_i]$,我们有

$$\varepsilon\exp(-\beta_i\omega_i)>x_i(t_0)=x_i(t_1)\exp\int_{t_1}^{t_0}(b_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t))\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\varepsilon\exp\left[\int_{t_1}^{t_1+p\omega_i}+\int_{t_1+p\omega_i}^{t_0}(b_i(t)-a_{ii}(t)\varepsilon-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(t)(x_{j0}(t)+\varepsilon))\mathrm{d}t\right]\geqslant$$
$$\varepsilon\exp\int_{t_1+p\omega_i}^{t_0}(b_i(t)-a_{11}(t)\varepsilon-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(t)(x_{j0}(t)+\varepsilon))\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\varepsilon\exp(-\beta_i\omega_i),$$

矛盾.这表明必有$x_i(t)\geqslant\varepsilon\exp(-\beta_i\omega_i)$对$t\geqslant t_i$.选取

$$\delta=\min\{\varepsilon\exp(-\beta_i\omega_i):i=1,2,\ldots,n\},T=\max\{t_i:i=1,2,\ldots,n\},$$

则δ不依赖于系统(1)的任何正解.结合(4)式最终得到

$$\delta\leqslant x_i(t)\leqslant\Delta\text{对}t\geqslant T,i=1,2,\ldots,n.$$

故系统(1)的正解一致持续生存.

当系统(1)为周期情形时，即所有的$b_i(t)$和$a_{ij}(t)(i,j=1,2,\ldots,n)$是周期连续函数，且有共同周期$\omega>0$.相应于引理1有结论：

引理2　若周期系统(2)满足条件：$\int_0^\omega b_i(t)dt>0$和$\int_0^\omega a_{ii}(t)dt>0$,则一定存在唯一的全局渐近稳定的正$\omega$-周期解.

不难求出周期系统(2)的正ω-周期解满足：

$$(x_i^*(t))^{-1}=e^{-\int_0^t b_i(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(\int_0^t a_{ii}(s)e^{\int_0^s b_i(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s+c_i^*\right),$$

其中 $c_i^* = (e^{\int_0^\omega b_i(t)\mathrm{d}t}-1)^{-1}\int_0^\omega a_{ii}(s)e^{\int_0^s b_i(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.$

设$x_{i0}(t)$为系统(2)分别对i=1,2,...，n由引理3所确定的唯一正ω-周期解，根据定理1有结论：

推论1　若周期系统(1)满足条件：

$$\int_0^\omega a_{ii}(t)\mathrm{d}t > 0,\ \int_0^\omega (b_i(t) - \sum_{j\neq i}^n a_{ij}(t)x_{j0}(t))\mathrm{d}t > 0,\quad i = 1,2,\cdots,n,$$

则系统(1)是一致持续生存的，并且存在一个正ω-周期解.

关于引理2和推论1中的正ω-周期解的存在性可由［10］的周期解存在定理所保证.从定理1和推论1可以看到，周期情形下的系统(1)的持续生存和正周期解存在性的一些结果被推广到了一般非自治的情形.

3　全局渐近稳定性

在系统(1)的全局渐近稳定性的研究中，目前已经得到的许多结果都要求下面的假设H)成立，有些结果甚至要求更强的条件，参见文献［1～4，6，7，11］.

H).存在正常数T和c_i(i=1,2,...，n)和定义于[0,∞)上的非负可积函数μ(t),且$\int_0^\infty \mu(t)dt=+\infty$，使得

$$c_i a_{ii}(t) - \sum_{j\neq i}^n c_j a_{ji}(t) \geqslant \mu(t)\ 对\ t \geqslant T, i = 1,2,\cdots,n.$$

本节在定理1的基础上建立一个新的关于系统(1)为全局渐近稳定的判别准则.首先引入下面的概念.

定义1　对定义于[T,∞)上的非负可积函数φ(t),如果对任何的区间序列｛$[a_i,b_i]$｝,且$[a_i,b_i]\cap[a_j,b_j]=\varnothing$和$b_i-a_i=b_j-a_j>0$对一切i,j=1,2,...，且i≠j，都有$\sum_{i=1}^\infty \int_{a_i}^{b_i}\varphi(t)\mathrm{d}t = +\infty$,则称函数φ(t)是N类的，记为φ(t)∈N.

下面的结论成立.

定理2　设系统(1)满足条件:

1).定理1的全部条件成立;

2).存在正常数T,c_i(i=1,2,...,n)和r∈{1,2,...,n}使得

$$A_i(t) = c_i a_{ii}(t) - \sum_{j\neq i}^n c_j a_{ji}(t) \geqslant 0\quad 对\ t \geqslant T, i = 1,2,\cdots,n,$$

并且$A_i(t)$∈N对i=r+1,r+2,...,n;

3).存在正常数ρ,H,d_i(i=1,2,...,r)和定义于$[T,\infty)$上的非负可积函数$\mu(t)$,且$\int_s^t \mu(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant -H+\rho(t-s)$对一切$t\geqslant s\geqslant T$,使得

$$d_i a_{ii}(t) - \sum_{i\neq i}^r d_j a_{ji}(t) \geqslant \mu(t)\quad 对\ t \geqslant T, i = 1,2,\cdots,r,$$

则系统(1)是一致持续生存和全局渐近稳定的.

证　设$x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$和$x^*(t)=(x^*_1(t),x^*_2(t),...,x^*_n(t))$是系统(1)的任何两个正解，由定理1得知，存在正常数m,M使得

$m \leqslant x_i(t), x^*_i(t) \leqslant M$ 对 $t \geqslant t_0, i=1,2,\dots,n.$

选取Liapunov函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left| \ln x_i(t) - \ln x_i^*(t) \right|,$$

根据条件2)，计算Dini导数得到

$$D_+ V(t) \leqslant - \sum_{i=1}^{n} A_i(t) \left| x_i(t) - x_i^*(t) \right| \quad \text{对 } t \geqslant T. \tag{5}$$

显然，解$x^*(t)$在Liapunov意义下的稳定性由(5)式和Liapunov稳定性基本定理[10]得到.进一步由(5)式又得到

$$\int_T^{\infty} A_i(t) \left| x_i(t) - x_i^*(t) \right| \mathrm{d}t < +\infty \quad \text{对 } i = 1,2,\cdots,n.$$

设$v_i(t)=x_i(t)-x_i(t)$,对$i=r+1,r+2,\dots n$,以下证明$v_i(t)\to 0$,当$t\to\infty$时.假设存在时间序列$\{t_n\}$使得$t_n\to+\infty, v_i(t_n)\to a_i$当$n\to\infty$时，且$a_i\neq 0$，不失一般性取$a_i>0$.由于

$$\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = x_i(t)\Big(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t)\Big) - x_i^*(t)\Big(b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j^*(t)\Big),\ t \geqslant t_0,$$

根据$b_i(t), a_{ij}(t), x(t)$和$x(t)$的有界性得知$dv_i(t)/dt$在$[0,\infty)$上也有界，因此存在正常数h_i和n_i使得$v_i(t)\geqslant a_i/2$对$t\in[t_n-h_i, t_n+h_i]$和$n\geqslant n_i$.

不失一般性假设$[t_n-h_i, t_n+h_i]\cap[t_m-h_i, t_m+h_i]=\varnothing$对任何$n\neq m$.由$A_i(t)\in N$得到

$$\int_T^{\infty} A_i(t) \left| x_i(t) - x_i^*(t) \right| \mathrm{d}t \geqslant \sum_{n \geqslant n_i}^{\infty} \int_{t_n - h_i}^{t_n + h_i} A_i(t) \left| v_i(t) \right| \mathrm{d}t \geqslant$$

$$\frac{a_i}{2} \sum_{n \geqslant n_i}^{\infty} \int_{t_n - h_i}^{t_n + h_i} A_i(t) \mathrm{d}t = +\infty,$$

但这是矛盾.因此当$t\to\infty$时$v_i(t)\to 0$.即$x_i(t)-x_i(t)\to 0$对$i=r+1,r+2,\dots,n$.

进一步选取Liapunov函数

$$V_r(t) = \sum_{i=1}^{r} d_i \left| \ln x_i(t) - \ln x_i^*(t) \right|,$$

计算Dini导数得到

$$D_+V_r(t)\leqslant\sum_{i=1}^{r}d_i(-a_{ii}(t)|x_i(t)-x_i^*(t)|+\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(t)|x_j(t)-x_j^*(t)|)=$$

$$-\sum_{i=1}^{r}(d_ia_{ii}(t)-\sum_{j\neq i}^{r}d_ja_{ji}(t))|x_i(t)-x_i^*(t)|+$$

$$\sum_{i=1}^{r}(d_i\sum_{j=r+1}^{n}a_{ij}(t)|x_j(t)-x_j^*(t)|)\quad 对\ t\geqslant T.$$

因此，由条件3)得知

$$D_+V_r(t)\leqslant-\mu(t)\sum_{i=1}^{r}|x_i(t)-x_i^*(t)|+g(t)\quad 对\ t\geqslant T,$$

这里 $g(t)=\sum_{i=1}^{r}(d_i\sum_{j=r+1}^{n}a_{ij}(t)|x_j(t)-x_j^*(t)|)$.从而有

$$D_+V_r(t)\leqslant-\lambda\mu(t)V_r(t)+g(t)\quad 对\ t\geqslant T,$$

这里$\lambda=\min\{d^{-1}_i:i=1,2,\ldots,r\}m>0$.由于$g(t)\to 0$当$t\to\infty$时.根据微分不等式定理和一阶线性方程的解的常数变易公式得到$V_r(t)\to 0$当$t\to\infty$时.这表明$x_i(t)-x_i(t)\to 0$当$t\to\infty$时对$i=1,2,\ldots$，r.因此，最终证明了正解$x^*(t)$是全局吸引的.

为了说明假设H)和定理2中条件的区别，考察下面的两种群系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1(2-x_1-x_2),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2(1-(1-|\sin t|)x_1-x_2),\end{cases}\tag{6}$$

这里$b_1(t)=2,b_2(t)=a_{11}(t)=a_{12}(t)=a_{22}(t)=1$和$a_{21}(t)=1-|\sin t|$，系统(6)是周期竞争的，并且周期为$\pi$，显然$x_{10}(t)=2$和$x_{20}(t)=1$.由于$\int_0^{\pi}(2-x_{20}(t))dt=\pi$和$\int_0^{\pi}(1-(1-|\sin t|)x_{10}(t))dt=4-\pi$，因此推论1的全部条件成立.故系统(6)是一致持续生存的，并且存在正周期解.

对任何正常数c_1和c_2，由于$c_1a_{11}(t)-c_2a_{21}(t)=c_1-c_2+c_2|\sin t|\geqslant 0$和$c_2a_{22}(t)-c_1a_{12}(t)=c_2-c_1\geqslant 0$，故只能有$c_1=c_2$.即假设H)不成立.选取$c_1=c_2=1$,则$A_1(t)=a_{11}(t)-a_{21}(t)=|\sin t|\in N$，所以定理2的全部条件显然成立.因此，由定理2得知系统(6)是全局渐近稳定的.

把本文的结果同文献［1～7］中的一些结果进行比较，不难看到，本文的结果分别在不同程度上推广了它们的结果.

从本文的定理和推论可以看到，我们将系统(1)为一般非自治情形和为周期的情形做了统一的处理.

国家教委留学回国人员科研启动基金和国家自然科学基金(19671084)资助课题.
作者单位：滕志东　新疆大学数学系　陈兰荪　中国科学院数学研究所
本文第一作者通讯地址：乌鲁木齐市新疆大学数学系　邮编830046

参考文献

1　Tineo, A., On the asymptotic behaviour of some population models, J.Math.Anal.Appl., 1992,169:516～529.
2　Gopalsamy, K., Global asymptotic stability in a periodic Lotka－Volterra system,

J.Austral. Math. Soc. Ser. B, 1985,27:66～72.
3 Tineo, A., Alvarez, C., A different consideration about the globally asymptoticlly stable solution of the periodic n－competing species problem, J.Math.Anal.Appl., 1991,159:44～50.
4 Zhao Xiaoqiang, The qualitative analysis of n-species Lotka-Volterra periodic competition systems, Math. Comput. Modelling, 1991,15:3～8.
5 Tineo, A., An iterative scheme for the N-competing species problem, J. Differential Equations, 1995,116:1～15.
6 陈伯山, n阶非自治Volterra-Lotka竞争系统有界解的存在性和吸引性, 系统科学与数学, 1996, 16: 113～118.
7 Ahmad, S., Lazer, A.C., On the nonautonomous N-competing species problem, Appl.Anal., 1995,57:309～323.
8 Ahmad, S., On the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations, Proc. Amer. Math. Soc., 1993,117:199～205.
9 de Oca, F.M., Zeeman,M.L., Extinction in nonautonomous competitive Lotka-Volterra systems, Proc. Amer. Math. Soc., 1996,124:3677～3687.
10 Yoshizawa, T., Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions, Appl.Math.Science, Vol.14,Springer-Verlag, 1976.
11 Redheffer, R., Nonautonomous Lotka-Volterra systems, I, J.Differential Equations, 1996,127:519～541.

收稿: 1997-11-10.