高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第2期 Vol.14 No.2 1999

一类新的交错群Cayley网络

冀有虎

摘 要 本文利用交错群的Cayley图构作了一类互连网络，进而讨论了它的直径，容错度，容错直径和Hamilton连通性.这些性质表明它优于也是利用交错群构作的网络AG_n,且相似于著名的星形网络.

关键词 交错群，Cayley图，容错性.
分类号 (中图)O157.5；(1991MR)94C05,05C25.

A NEW CLASS OF CAYLEY NETWORKS BASED ON THE ALTERNATING GROUPS

Ji Youhu
School of Mathematics,Peking University,Beijing 100871

Abstract In this paper,a new class of interconnection networks constructed from Cayley graphs of the alternating groups is introduced.The diameter,fault tolerance,fault diameter and Hamilton connectivity of these networks are discussed.These properties show that it is better than AG_n constructed also from Cayley graphs of the alternating groups and similar to the famous Star networks.

Keywords Alternating Groups, Cayley Graphs, Fault Tolerance.
Subject Classification (CL) O157.5;(1991MR)94C05,05C25.

1 引 言

一个多处理器系统中实现处理器间通信的互连网络通常以有向或无向图作为其数学模型.近年来，通过一些有限群来构作的Cayley图为模型已经成为设计网络的主要方法之一[1].Cayley网络就是以有限群的Cayley图为数学模型的网络.十年前提出的Star网络就是Cayley网络的一个范例[1,2].

设G是一个具有单位元1的有限群，S是G\{1}的一个子集且满足：$s\in S\Rightarrow s^{-1}\in S$. Cayley图$\Gamma=\Gamma(G,S)$就是具有如下顶点集合和边集合的简单图：

$$V\Gamma=G;\ E\Gamma=\{(g,h)\mid g^{-1}h\in S\}.$$

因为群G的左正则表示G_L是Cayley图Γ(G，S)的自同构群的子群，所以Cayley图Γ(G，S)是点传递的(vertextransitive).

设S_n是n个文字1，2，…，n上的全体置换构成的置换群，A_n是S_n中所有偶置换组成的子群，称为交错群.本文通过交错群A_n的Cayley图构作一类新的Cayley网络.

令x=(123),y=(132),z_i=(12)(3i),i=4,…，n以及$\Omega=\{x,y,z_i: i=4,\dots,n\}$.可以验证，$\Omega$是$A_n$的一个生成集，且满足 $\Omega^{-1}=\{x^{-1},y^{-1},z^{-1}_i: i=4,\dots,n\}=\Omega$.把以Cayley图$\Gamma(A_n,\Omega)$为模型的Cayley网络记为$AN_n$.以后将不加区别地使用“图$AN_n$”和“网络$AN_n$”这两个名词.容易验证，$AN_n$是一个点传递的n-1度正则图.

本文研究了Cayley网络AN_n的一些性质：证明了AN_n是最优容错的，即其连通度为n-1；确定了它的直径$d(AN_n)=\left\lceil\frac{3}{2}(n-2)\right\rceil$，并且证明其容错直径(FaultDiameter,见[3])至多比直径大3；证明了AN_n是Hamilton连通的，即任意两个顶点间都有一条Hamilton路相连.最后，把AN_n和已知的Star网络以及文[4]中也是通过交错群A_n的Cayley图构作的网络AG_n作了简单比较.结果表明，网络

AN_n的性质比AG_n更好.

2 AN_n的直径

设p是A_n中的一个元素，那么它能够表示成一些无交的的循环的乘积，即：

$$p=c_1\dots c_k e_1 e_2 \dots e_l$$

其中循环$c_i(i=1,2,\dots,k)$的长至少是2，循环$e_j,(j=1,2,\dots,l)$的长是1.因为AN_n是点传递的，所以只需要考虑从任一顶点到1的路径.下面是从顶点p到1的一个路径算法:

输入：网络顶点$p=c_1\dots c_k e_1 e_2 \dots e_l$.输出：一条从p到1的路.

第一步　设p′是该路中p的邻点.

(1)如果p中文字3不变，且含有$(i_1 i_2 \dots i_k)$,$k\geqslant 2$，$i_j>3$，$j=1,2,\dots,k$的循环，那么$p'=p\cdot(12)(3i_1)$；若没有上述循环，则p中有$(i_1\dots i_k 1\dots)$或$(i_1\dots i_k 2\dots)$的循环，其中$k\geqslant 1$,$i_1,\dots,i_k>3$,那么，

$p'=p\cdot(132)$或$p'=p\cdot(123)$.

(2)如果p中文字3变动，且含有$(i_1\dots i_k 3\dots)$，$k\geqslant 1$,$i_1,\dots,i_k>3$的循环，那么$p'=p\cdot(12)(3i_k)$;如果没有此类循环，而含有$(i_1\dots i_k 13\dots)(2)$或$(i_1\dots i_k 23\dots)(1)$的循环，其中$k\geqslant 1$,$i_1,\dots,i_k>3$，那么$p'=p\cdot(132)$或$p'=p\cdot(123)$；如果上述两类循环都不含有，而含有$(13\dots)(2i_1\dots i_k)$或$(23\dots)(1i_1\dots i_k)$的循环，其中$k\geqslant 1$,$i_1,\dots,i_k>3$，那么$p'=p\cdot(123)$或$p'=p\cdot(132)$.

第二步　依次变换p′中的文字$i_k,i_{k-1},\dots,i_1$，使其为单点循环.

第三步　依前两步变换各个非单点循环，最后变换文字1，2，3.

例如AN_5中，(14)(25)和(15324)到1的路径如下：

(14)(25)→(14253)→(14)(23)→(143)→(132)→1.

(15324)→(13)(24)→(243)→(123)→1.

引理2.1　设p是AN_n中具有形式$p=c_1\dots c_k e_1 e_2\dots e_l$的一个顶点，m是p到1的最短路径的长，

(1)如果3不变化，那么：

$$m\leqslant n-l+k-\begin{cases}0 & \text{若 1 和 2 有形式:}(1);(2);(1i_1\cdots i_s 2j_1\cdots j_t),1\leqslant s,t,\\ 3 & \text{若 1 和 2 有形式:}(12),\\ 1 & \text{其它情形;}\end{cases}$$

(2)如果3变化，那么：

$$m\leqslant n-l+k-\begin{cases}5 & \text{若 1,2 和 3 有形式:}(12)(3i_1\cdots i_t)\quad t\geqslant 1,\\ 3 & \text{若 1,2 和 3 有形式:}(12i_1\cdots i_s)(3j_1\cdots j_t)\quad s,t\geqslant 1,\\ & (13i_1\cdots i_s)(2j_1\cdots j_t),(23i_1\cdots i_s)(1j_1\cdots j_t)\quad s\geqslant 0,t\geqslant 1,\\ & (12i_1\cdots i_r 3j_1\cdots j_s),(21i_1\cdots i_r 3j_1\cdots j_s)\quad r,s\geqslant 0,\\ & (1i_1\cdots i_r)(2j_1\cdots j_s)(3k_1\cdots k_t)\quad r,s,t\geqslant 1,\\ 2 & \text{其它情形.}\end{cases}$$

定理2.2　AN_n的直径$D(AN_n)=\left\lceil \frac{3}{2}(n-2)\right\rceil$.

证　当n是偶数时，$\left\lceil \frac{3}{2}(n-2)\right\rceil=\frac{3}{2}(n-2)$，当n是奇数时，$\left\lceil \frac{3}{2}(n-2)\right\rceil=\frac{3}{2}(n-1)-1$. 由引理2.1知，$AN_n$中任意两点间最短路径的长不会超过$\left\lceil \frac{3}{2}(n-2)\right\rceil$. 因此，只需证明存在一个顶点p，它到1的最短路径的长达到此上限.

当n和$\frac{n}{2}$都为偶数时，(14)(25)(36)(78)…(n-1,n)到1的最短路径长为$\frac{3}{2}$(n-6)+1+5=$\frac{3}{2}$(n-2).当n为奇数，$\frac{n-1}{2}$为偶数时，(14)(3)(25)(67)…(n-1,n)到1的最短路径的长为$\frac{3}{2}$(n-5)+4+1=$\frac{3}{2}$(n-1)-1.当n为偶数，$\frac{n}{2}$为奇数时，(1425)(36)(78)…(n-1,n)到1的最短路径的长为$1+3\left(\frac{n-6}{2}\right)+5=\frac{3}{2}(n-2)$.当n和$\frac{n-1}{2}$都为奇数时，(1425)(3)(67)…(n-1,n)到1的最短路径的长为$3\left(\frac{n-5}{2}\right)+5=\frac{3}{2}(n-1)-1$.

由上可知，$D(AN_n)=\left\lceil \frac{3}{2}(n-2)\right\rceil$.

3　AN_n的容错度和容错直径

定义3.1　设Γ是一个图，k是一个正整数.则Γ的容错度定义为：

$$F(\Gamma)=\max\{k:\Gamma\text{中任意去掉}k\text{个顶点后的图仍连通}\}.$$

显然，除完全图外，一个图的容错度就是该图的连通度减1.因此一个d度正则图的容错度至多是d-1，如果等于d-1，那么这个图称为最优容错的(optimalfaulttolerent).下面是Cayley图最优容错的一个充分条件[5].

设$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}$是有限群G的一个生成集，如果由$S_i=\{s_1,s_2,\cdots,s_i\}$生成的群是由$S_{i+1}=\{s_1,s_2,\cdots,s_{i+1}\}$生成的群的真子群(i=1,…，t-1),那么称S为G的分级生成集(hierarchicalgeneratingset).

引理3.2[5]　设$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}$是有限群G的一个分级生成集，若$S\subseteq\bar{S}\subseteq S\cup S^{-1}$，$\Gamma=Cay(G,\bar{S})$.那么Γ的连通度$k(\Gamma)=|\bar{S}|$除非t≥3，$s_1^2=1$，$s_i^2=s_1$，i=2,…，t.

由AN_n的定义可知，Ω是A_n的一个分级生成集且不属于引理3.2的例外情形，因此有下面的结果：

定理3.3　AN_n是最优容错的.

网络的直径不能反映网络的容错性质，因此，考虑到容错性的直径是更有意义的网络性能度量(见[3]).

定义3.4　设Γ是一个图，Γ的容错度F(Γ)＝k.那么，Γ的容错直径FD(Γ)是Γ中任意去掉k个顶点后的图的直径的最大可能值.

定理3.5　$FD(AN_n)\leqslant D(AN_n)+3$.

证　因为AN_3是完全图，所以考虑n≥4的情形.

由定理3.3知，只需要考虑AN_n中任意去掉n-2个顶点的图.

设$x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$是AN_n中任意给定的n-2个顶点.显然，存在一个文字ω,使$x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$中不存在(ω3…)型循环；更进一步，存在文字j,k,其中k＞3，使$x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$中都不存在(jk…)型循环.由A_n的左正则表示$(A_n)_L$是AN_n的传递的自同构群可得，存在文字i＞3，使$x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$中没有(ωi…)型循环.记由所有含(ωi…)型循环的置换构成的子图为AN^*_{n-1}，由Ω的定义知，AN^*_{n-1}同构于AN_{n-1}.

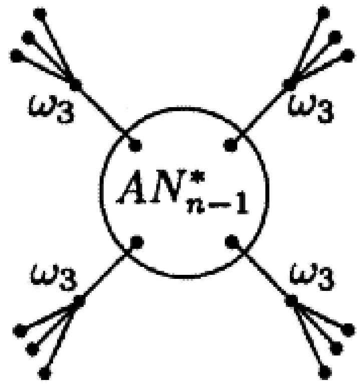

图1

因为$x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$中不含(ω3…)型循环，故称含(ω3…)型循环的顶点为ω3点.由AN_n的定义知，AN^*_{n-1}中每个顶点有且仅有一个ω3邻点.(如图1所示)
由图示知，$x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$只能是图中的末端点，因此，$FD(AN_n)\leqslant D(AN_{n-1})+4$,
又因$D(AN_{n-1})\leqslant D(AN_n)-1$，所以：$FD(AN_n)\leqslant D(AN_n)+3$.

4　AN_n的Hamilton连通性

如果一个图Γ的任意两个顶点间都有一条Hamilton路相连，那么称之为Hamilton连通的.很显然，两个相邻的顶点间的Hamilton路即成一个Hamilton圈.具有Hamilton圈的图称为Hamiltonian的.Hamiltonian是互连网络的一个基本网络性质，它为设计网络算法提供一个直观的路径.利用AN_n的分级性质容易证明它的Hamilton连通性.

定理4.1　AN_n是Hamilton连通的.

证　对n应用归纳法，证明AN_n中任意两点间存在Hamilton路.

当n=3时，AN_3是完全图，结论成立.

假设n=k时结论成立.因为$|A_{k+1}:A_k|=k+1$，所以AN_{k+1}由k+1个AN_k通过由z_{k+1}确定的边，即(x,xz_{k+1})相连构成,记这些边为z_{k+1}-边.以k+1个AN_k为顶点构造块图T，两个顶点在T中邻接当且仅当它们在AN_{k+1}中通过z_{k+1}-边相连.不难看出，T是k+1个顶点的完全图.由完全图的性质和归纳假设知，n=k+1时结论也成立.

5　结论

网络AN_n和AG_n[4]都是由交错群A_n的Cayley图构造的，而Star网络是由S_n的Cayley图构造的.AN_n和Star网络有相同的度数且直径小1；两者具有相似的容错性质.AN_n和AG_n在阶相等，直径几乎相等的情形下，度数要比AG_n小得多.通过AN_n，Star网络和AG_n的简单比较可以看出，网络AN_n的性质比AG_n更好.

表1是三个网络的一个比较，其中d表示网络的直径.

表1

网络	顶点数	度数	直径	连通度数	容错直径
Stargraph	n!	n-1	$\left\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \right\rfloor$	n-1	d+1
AG_n	n!　/2	2(n-2)	$\left\lfloor \frac{3}{2}(n-2) \right\rfloor$	2(n-2)	
AN_n	n!　/2	n-1	$\left\lceil \frac{3}{2}(n-2) \right\rceil$	n-1	≤d+3

作者现在为南开大学组合数学研究中心博士后研究人员.

作者单位：北京大学数学科学学院
本文作者通讯地址：天津市南开大学组合数学研究中心　邮编300071

参考文献

1　Akers,S.B.and Krishnamurthy, B.,A group theoretic model for symmetric interconnection networks,IEEE Trans.Comput.,1986,38:216～223.
2　Akers,S.B.and Krishnamurthy, B.,The fault tolerance of star graph,Proc.2nd Internat.Conf.on Supercomputing,San Francisco,1987.
3　Pradhan,D.K.and Meyer,F.J.,Communication structures in fault tolerant distributed systems,Networks,1993,23:379～389.
4　Jwo,J.,Lakshmivarahan,S. and Dhall,S.K.,A new class of interconnection networks based on the alternating groups,Networks,1993,23:315～326.
5　Hamidoune,Y.O.,Llado,A.S.and Serra,O.,The connectivity of hierarchical Cayley digraphs,Discrete Applied Mathematics,1992,37/38:175～180.
6　Biggs,N.,Algebraic Graph Theory,Cambridge University Press,New York,1974.
7　Coxeter,H. and Moser,W.,Generators and relations for discrete groups,Springer－Verlag,Berlin,1965.

收稿：1997-12-29.