文章编号:1001-5132（2010）02-0057-05

一类具有 $L^{p,\mu}(\Omega)$ 系数的 Schrödinger 方程解的 Hölder 连续性

王世元 [1]，陶祥兴 [2*]

（1.宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211; 2.浙江科技学院 理学院，浙江 杭州 310023）

摘要： 证明了 Schrödinger 方程：$Lu=-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b\nabla u+vu=0$ 的弱解的局部 Hölder 连续性，其中系数 $|b|^2, v\in L^{p,\mu}(\Omega)(n-2p\leqslant\mu<n)$，进一步推广和细化了已有的结果.

关键词： Schrödinger 方程; Green 函数; Hölder 连续性

中图分类号： O175.25 **文献标识码：** A

对于下面的 Schrödinger 方程:

$$Lu=-(a_{ij}(x)u_{x_i}(x))_{x_j}+b(x)\nabla u(x)+v(x)u(x)=0,\ x\in\Omega.$$

由于其在工程和物理中有着广泛的应用，许多数学家都对它进行了研究. 1982 年 Aizenman M 和 Simon B[1]考虑了方程 $-\Delta u+vu=0$，其中 $v\in K_n(\Omega)$，证明了 Harnack 不等式并且由此得到了解的连续性. 1986 年 Chiarenza F 等[2]给出了 $Lu=0$，当 $b(x)=0, v(x)\in K_n(\Omega)$ 时，弱解的 Harnack 不等式的证明及其局部连续性估计，推广了文献[1]的结果. 1994 年 Kurata K[3]给出了 $Lu=0$，当 $|b(x)|^2$，$v(x)\in K_n^{loc}(\Omega)$ 时，Harnack 不等式的证明，得到了弱解的连续性及 $|\nabla u|^2\in K_n^{loc}(\Omega)$. 1988 年 Fazio G D[4]考虑了 $Lu=0$，当 $b(x)=0$，$v(x)\in L^{1,\lambda}(\Omega)$ 时，得到了非常弱解的表示公式，并且讨论了弱解的 Hölder 连续性; 2000 年 Chen Yemin[5]讨论了当系数 $|b(x)|^2, v(x)\in L^{1,\lambda}(\Omega)(n-2<\lambda<n)$ 时，方程 $Lu=0$ 弱解的 Hölder 连续性估计.

笔者主要讨论了当 $|b(x)|^2, v(x)\in L^{p,\mu}(\Omega)(n-2p\leqslant\mu<n)$ 时, Schrödinger 方程 $Lu=0$ 局部弱解的 Hölder 连续性，主要结论如下:

定理 1 设 $u(x)$ 是 $Lu=-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b\nabla u+vu=0$ 的弱解，$B_{5r}(x_0)\subseteq\Omega$，则 $\exists$ 常数 C 及 α 使得 $\forall x\in B_r(x_0)$，有:

$$\begin{aligned}|u(x)-u(x_0)|\leqslant C\sup_{x\in B_{5r}(x_0)}|u(x)|(2|x-x_0|^{\alpha}r^{-\alpha}+\\ |x-x_0|^{\alpha/2}(2r^{(\mu-n)/p+2-\alpha/2}+r^{(\mu-n)/(2p)+1-\alpha/2})+\\ 2|x-x_0|^{(\mu-n)/(2p)+1}r^{(\mu-n)/(2p)+1}+\\ |x-x_0|^{(\mu-n)/(4p)+1/2}r^{(\mu-n)/(4p)+1/2}),\end{aligned}$$

其中 C 仅与 n, Λ, μ, $\|v(x)\|_{L^{p,\mu}(\Omega)}$，$\||b(x)|^2\|_{L^{p,\mu}(\Omega)}$ 有关，α 仅与 n，Λ 有关.

笔者主要利用非常弱解的表示公式及 Green 函数的大小估计，对方程 $Lu=0$ 的解进行了有效估计. 通过讨论得到当方程系数的性质进一步提升时，其结果更细化和准确，从而使已有的结果得到更进一步的推广.

收稿日期：2008-11-30. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金（10771110）.
第一作者：王世元（1985－），男，河南信阳人，在读硕士研究生，主要研究方向：偏微分方程及其应用. E-mail: wsy882007@163.com
*通讯作者：陶祥兴（1966－），男，浙江台州人，博士/教授，主要研究方向：调和分析与偏微分方程. E-mail: xxtau@163.com

1 一些函数空间及其性质

设 Ω 是 $R^n(n\geqslant 3)$ 上的有界开集，记 $B_r(x)=\{y\in R^n \,\|\, x-y|<r\}$，$\Omega_r(x)=\Omega\bigcap B_r(x)$，用 $|\cdot|$ 表示一个集合的 Lebesgue 测度. 令 Ω 具有下面性质: $\forall x\in\partial\Omega$，当 $0<r<\mathrm{diam}(\Omega)$ 时，$\exists h\in(0,1)$ 使得 $\Omega_r(x)\geqslant h|B_r(x)|$. 为书写简便，记 $u_{x_i}=\partial u(x)/\partial x_i$，文中省略了指标 i, j 的求和符号，不影响讨论，常数 C 在不同的地方表示不同的数值.

定义 1 $f(x)\in K_n(\Omega)$ (Stummel-Kato 类) $\Leftrightarrow$ $\exists$ 非降函数 $\eta(r)>0$，使得:

$$\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega_r(x)} f(y)/|x-y|^{n-2}\,\mathrm{d}y\leqslant\eta(r)\to 0,\ r\to 0.$$

注 1 由定义易知 $K_n(\Omega)\subseteq L^1(\Omega)$.

定义 2 $f(x)\in L^{p,\mu}(\Omega)$ (Morrey 空间) $(0<\mu<n)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)\in L^p(\Omega)\subseteq L^1(\Omega)$，并且有:

$$\|f(x)\|_{L^{p,\mu}(\Omega)}=(\sup_{\substack{x\in\Omega\\ r>0}} r^{-\mu}\int_{\Omega_r(x)}|f(y)|^p\,\mathrm{d}y)^{1/p}<+\infty.$$

由文献[4]中的引理 1.1 可得下面结论.

定理 2 如果 $v(x)\in L^{p,\mu}(\Omega)$，$n-2p\leqslant\mu<n$，则有 $v(x)\in K_n(\Omega)$，并且

$$\int_{\Omega_r(x)}\frac{|v(y)|}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y\leqslant C\,r^{(\mu-n)/p+2}\,\|v(x)\|_{L^{p,\mu}(\Omega)},$$

其中 C 仅 Λ 与 n 有关，与 x, r 无关.

证明 类似文献[4]中的处理方法，我们有:

$$\int_{\Omega_r(x)}\frac{|v(y)|}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Omega\bigcap\{r/2^{k+1}\leqslant|x-y|\leqslant r/2^k\}}|v(y)|\cdot$$
$$|x-y|^{2-n}\,\mathrm{d}y\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Omega\bigcap\{r/2^{k+1}\leqslant|x-y|\leqslant r/2^k\}}r^{2-n}\cdot$$
$$(1/2^{k+1})^{2-n}\,|v(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}r^{2-n}(2^{-k-1})^{2-n}\cdot$$
$$\int_{\Omega_{r/2^k}(x)}|v(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant r^{2-n}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-(k+1)(2-n)}r^{\mu/p}\cdot$$
$$(r^{-\mu}\int_{\Omega_{r/2^k}(x)}|v(y)|^p\,\mathrm{d}y)^{1/p}(r/2^k)^{n/p'}\leqslant$$
$$r^{\mu/p+n/p'+2-n}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-(k+1)(2-n)-kn/p'}(r^{-\mu}\int_{\Omega_{r/2^k}(x)}|v(y)|^p\cdot$$
$$\mathrm{d}y)^{1/p}\leqslant C\,r^{(\mu-n)/p+2}\,\|v(x)\|_{L^{p,\mu}(\Omega)}.$$

对不等式两边 $x\in\Omega$ 取上确界即可知 $v(x)\in K_n(\Omega)$. 证毕.

定义 3 $u(x)\in H^{1,p}(\Omega)$，$(1<p<+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $u(x)$，$\partial u/\partial x_i(x)\in L^p(\Omega)$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$ 空间范数定义为:

$$\|u(x)\|_{H^{1,p}(\Omega)}=\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|\partial u(x)/\partial x_i\|_{L^p(\Omega)},$$

易知 $H^{1,p}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间.

注 2 $H_0^{1,p}(\Omega)$ 是 $\wp(\Omega)$ 在上述范数定义下的闭包；$H^{-1,p}(\Omega)$ 是 $H_0^{1,q}(\Omega)$ 共轭空间，其中 $1/p+1/q=1$. 且 $u(x)\in H^{-1,p}(\Omega)\Leftrightarrow$ 存在 $f_i(x)\in L^p(\Omega)$, $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 使得: $u(x)=\sum_{i=1}^{n}\partial f_i/\partial x_i(x)+f_0(x)$.

注 3 在空间内的局部区域上定义 3 也是有意义的.

2 Green 函数及其性质与非常弱解的表示公式

令 $L_0u=-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}$，其中 $a_{ij}(x)$ 满足下列条件: (1) $a_{ij}(x)$ 是 Ω 上有界可测函数，且 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$; (2)一致椭圆性条件: $\exists\Lambda>0$，使 $\Lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda^{-1}|\xi|^2,\forall\xi\in R^n$. 函数 $|b(x)|^2$ 及 $v(x)$ 属于 $L^{p,\mu}(\Omega)$，其中 $n-2p\leqslant\mu<n$.

定义 4 $u(x)\in H_{loc}^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $Lu=-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b\nabla u+vu=0$ 的弱解，当且仅当下列等式成立:

$$\int_\Omega(a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j})\mathrm{d}x+\int_\Omega(b\nabla u\varphi)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(vu\varphi)\mathrm{d}x=0,$$
$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

定义 5 设 σ 是 Ω 上的有界变差测度，$T=\sum_{i=1}^{n}\partial f_i/\partial x_i(x)\in H^{-1,2}(\Omega)$ 则有: 称 $u(x)\in L^1(\Omega)$ 是方程 $L_0u(x)=\sigma+T$ 的非常弱解 $\Leftrightarrow$ $\int_\Omega(uL_0\psi)\mathrm{d}x=\int_\Omega\psi\,\mathrm{d}\sigma(x)-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(f_i\psi_{x_i})\mathrm{d}x$, $\forall\psi\in H_0^{1,2}\bigcap C^0(\overline{\Omega})$，且使得 $\forall L_0\psi\in C^0(\overline{\Omega})$.

引理 1[4] 设 σ 是 Ω 上的有界变差测度，$T=\sum_{i=1}^{n}\partial f_i/\partial x_i\in H^{-1,2}(\Omega)$，如果 $u(x)\in H_0^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $L_0u(x)=\sigma+T$ 的弱解，则 $u(x)$ 也是同一方程的非常弱解.

定义 6　$\delta_y(x)$ 表示狄拉克函数, 我们称方程 $L_0u(x)=\delta_y(x)$ 的非常弱解为算子 L_0 的以 y 为极点的 Green 函数, 并记为 $g(x,y)$.

引理 2[4]　设 $T\in H^{-1,p}(\Omega)\ (p>n)$, σ 是 Ω 上有界变差测度, 若 $u(x)$ 是方程 $L_0u(x)=\sigma+\mathrm{T}$ 非常弱解, 则 $u(x)=\int_\Omega g(x,y)\mathrm{d}\sigma(y)+\int_\Omega g(x,y)T(y)\mathrm{d}y$.

证明　由文献[6]中定理 6.1($T=0$ 的情形)及文献[4]中定理 2.2 ($\sigma=0$ 的情形)综合即可得此定理成立. 证毕.

注 4　如果 $g(x,y)$ 限制在 $H_0^{1,2}(\Omega)$ 中, 则引理 2 中 $p=2$ 的情形也是成立的, 只须对文献[4]中的证明过程稍作修改即可.

引理 3　设 $u(x)$ 是 $Lu(x)=0$ 弱解, $B_{2r}(x_0)\subseteq\Omega$, 则 $\exists$ 常数 C, 使得:

$$\int_{B_r(x_0)} g(x,y)|\nabla u(y)|^2\mathrm{d}y\leqslant C(osc(u(x))^2+r^{(\mu-n)/p+2}\|u(x)\|^2_{L^\infty(B_r(x_0))}),$$

其中 C 仅与 $n,\ \Lambda,\ \mu,\ \|v(x)\|_{L^{p,\mu}(\Omega)},\ \||b(x)|^2\|_{L^{p,\mu}(\Omega)}$ 有关, $\underset{B_r(x_0)}{osc}(u(x))^2=\sup\limits_{x,y\in B_r(x_0)}|u^2(x)-u^2(y)|$.

证明　由文献[3]中引理 5.1 与定理 2 结合即可得定理结论成立. 证毕.

3　定理 1 的证明

证明　设 $u(x)$ 是 $Lu(x)=0$ 的弱解, 即 $u(x)\in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$, 且有:

$$\int_\Omega(a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j})\mathrm{d}x+\int_\Omega(b\nabla u\varphi+vu\varphi)\mathrm{d}x=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).\tag{1}$$

再取 $\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 易知 $\varphi\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 将(1)式中 $\varphi(x)$ 替换为 $\varphi\psi(x)$, 则有:

$$\int_\Omega a_{ij}(u\varphi)_{x_i}\psi_{x_j}\mathrm{d}x=\int_\Omega a_{ij}u\varphi_{x_i}\psi_{x_j}\mathrm{d}x-\int_\Omega a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j}\psi\,\mathrm{d}x-\int_\Omega(b\nabla u+vu)\varphi\psi\,\mathrm{d}x.$$

易验证 $a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j}$, $(a_{ij}u\varphi_{x_j})_{x_i}\in H^{-1,2}(\Omega)$; 由文献[5]中引理 4.1 知 $b\nabla u\varphi$ 和 $vu\varphi$ 是 Ω 上的有界变差测度.

令 $w(x)=u(x)\varphi(x)$, 依据引理 1 知: $w(x)$ 是方程 $L_0(w(x))=-(a_{ij}u\varphi_{x_i})_{x_j}-a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j}-b\nabla u\varphi-vu\varphi$ 的非常弱解.

选取 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$; $\varphi(x)\equiv1$, $x\in B_{3r/2}(x_0)$; supp $\varphi(x)\subseteq B_{2r}(x_0)$; $|\nabla\varphi(x)|\leqslant C/r$ 从而易知 supp $(\partial\varphi(x)/\partial x_i)\subseteq B_{2r}(x_0)\setminus B_{3r/2}(x_0)$.

于是取 $x\in B_r(x_0)$, $y\in\text{supp}\,\nabla\varphi(x)$, 由文献[6]知 $L_0u(x)=\sigma+\mathrm{T}$ 的非常弱解的唯一性. 则对 $\forall x\in B_r(x_0)$, 由引理 2 和注 4 有:

$$u(x)\varphi(x)=\int_\Omega a_{ij}u\varphi_{x_i}g_{x_j}(x,y)\mathrm{d}y-\int_\Omega a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j}g(x,y)\cdot\mathrm{d}y-\int_\Omega b\nabla u\varphi g(x,y)\mathrm{d}y-\int_\Omega vu\varphi g(x,y)\mathrm{d}y,$$

故由于 $\varphi(x)\equiv1, x\in B_{3r/2}(x_0)$, 得:

$$\begin{aligned}u(x)-u(x_0)={}&\int_\Omega a_{ij}u\varphi_{x_i}(g_{x_j}(x,y)-g_{x_j}(x_0,y))\mathrm{d}y-\\&\int_\Omega a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j}(g(x,y)-g(x_0,y))\mathrm{d}y-\\&\int_\Omega b\nabla u\varphi(g(x,y)-g(x_0,y))\mathrm{d}y-\\&\int_\Omega vu\varphi(g(x,y)-g(x_0,y))\mathrm{d}y:=I_1+I_2+I_b+I_v.\end{aligned}$$

首先估计 I_b:

$$\begin{aligned}I_b={}&-\int_{|x_0-y|>N_1|x-x_0|}(g(x,y)-g(x_0,y))vu\varphi\mathrm{d}y-\\&\int_{|x_0-y|\leqslant N_1|x-x_0|}(g(x,y)-g(x_0,y))vu\varphi\mathrm{d}y:=I_{b1}+I_{b2},\end{aligned}$$

其中 N_1 是大于1的待定常数.

对于 I_{b1}:

$$\begin{aligned}|g(x,y)-g(x_0,y)|\leqslant{}&\sup_{x\in B_{r_1}(x_0)}|g(x,y)-g(x_0,y)|\leqslant\underset{x\in B_{r_1}(x_0)}{osc}|g(x,y)|\leqslant\\&C_1r_1^\alpha(r^{-\alpha}\sup_{x\in B_r(x_0)}|g(x,y)|)\leqslant C_2r_1^\alpha r^{-\alpha}\cdot\\&\inf_{x\in B_{r_2}(x_0)}|g(x,y)|\leqslant C_2(r_1/r)^\alpha|g(x_0,y)|\leqslant\\&C_3(|x-x_0|/r)^\alpha|g(x_0,y)|,\end{aligned}$$

其中 $r_1\leqslant r\leqslant r_2$.

上述第 2 个不等式可由文献[7]中定理 8.22 得到, 第 3 个不等号由文献[2]中得到的 Harnack 不等式得到, 最后一个不等号只须选取 $|x-x_0|\leqslant r_1=(1+\delta)|x-x_0|\leqslant r(\delta>0)$ 即可.

此时由于 $|x_0-y|>N_1|x_0-y|$ 知: $|g(x,y)-g(x_0,y)|\leqslant C_2N_1^{-\alpha}g(x_0,y)$, 再由文献[6]中 7.9 式知:

$$g(x,y)\leqslant C(\Lambda,n)|x-y|^{2-n},\tag{2}$$

所以

$$|g(x,y)-g(x_0,y)|\leqslant CN_1^{-\alpha}|x_0-y|^{2-n}. \qquad (3)$$

故利用定理 2 及(3)式有:

$$|I_{b1}|\leqslant C(\Lambda,n)/N_1^{\alpha}\int_{B_{2r}(x_0)}|v(y)|/|x_0-y|^{n-2}\cdot \mathrm{d}y\sup_{B_{2r}(x_0)}|u(x)|\leqslant (C(\|v\|_{L^{p,\mu}(B_{2r}(x_0))},\mu,\Lambda,n)/N_1^{\alpha})r^{(\mu-n)/p+2}\sup_{B_{2r}(x_0)}|u|.$$

记 $\gamma_1=N_1|x-x_0|$, $\gamma_2=(N_1+1)|x-x_0|$. 类似地利用定理 2 及(2)式:

$$|I_{b2}|\leqslant\int_{|x_0-y|\leqslant N_1|x-x_0|}|g(x,y)vu\varphi|\mathrm{d}y+\int_{|x_0-y|\leqslant N_1|x-x_0|}|g(x_0,y)vu\varphi|\mathrm{d}y\leqslant C_1(\Lambda,n)\cdot\int_{|x-y|\leqslant(N_1+1)|x-x_0|}(|v(y)|/|x-y|^{n-2})|u(x)|\mathrm{d}y+C_2(\Lambda,n)\int_{|x-y|\leqslant N_1|x-x_0|}(|v(y)|/|x_0-y|^{n-2})|\cdot u(x)|\mathrm{d}y\leqslant C_1(\Lambda,n)((N_1+1)|x-x_0|)^{(\mu-n)/p+2}\cdot\|v\|_{L^{p,\mu}(B_{2\gamma_2}(x_0))}\sup_{B_{2\gamma_2}(x_0)}|u|+C_2(\Lambda,n)(N_1|x-x_0|)^{(\mu-n)/p+2}\|v\|_{L^{p,\mu}(B_{2\gamma_1}(x_0))}\sup_{B_{2\gamma_1}(x_0)}|u|\leqslant C(\Lambda,n)((N_1+1)|x-x_0|)^{(\mu-n)/p+2}\cdot\|v\|_{L^{p,\mu}(B_{2\gamma_2}(x_0))}\sup_{B_{2\gamma_2}(x_0)}|u|.$$

从而取 $N_1=(r/|x-x_0|)^{1/2}>1$, $N_1+1<2N_1$; 则有:

$$|I_b|=|I_{b1}+I_{b2}|\leqslant|I_{b1}|+|I_{b2}|\leqslant C(\|v\|_{L^{p,\mu}(B_{4r}(x_0))},\mu,\Lambda,n)\sup_{B_{4r}(x_0)}|u|(|x-x_0|^{\alpha/2}r^{(\mu-n)/p+2-\alpha/2}+|x-x_0|^{(\mu-n)/(2p)+1}\cdot r^{(\mu-n)/(2p)+1}).$$

接着类似于 I_b 的估计方法, 再来估计 I_v:

$$I_v=-\int_{|x_0-y|>N_2|x-x_0|}b\nabla u\varphi(g(x,y)-g(x_0,y))\mathrm{d}y-\int_{|x_0-y|\leqslant N_2|x-x_0|}b\nabla u\varphi\cdot(g(x,y)-g(x_0,y))\mathrm{d}y:=I_{v1}+I_{v2}.$$

对于 I_{v1}: 由(3)式及 Hölder 不等式可得:

$$|I_{v1}|\leqslant C(\Lambda,n)N_2^{-\alpha}\int_{B_{2r}(x_0)}|b\|\nabla u|\cdot|x_0-y|^{2-n}\mathrm{d}y\leqslant C(\Lambda,n)N_2^{-\alpha}\cdot(\int_{B_{2r}(x_0)}|b|^2|x_0-y|^{2-n}\mathrm{d}y)^{1/2}\cdot(\int_{B_{2r}(x_0)}|\nabla u|^2|x_0-y|^{2-n}\,\mathrm{d}y)^{1/2}.$$

由 $b^2(x)\in L^{p,\mu}(\Omega)$ 及定理 2 知:

$$\int_{B_{2r}(x_0)}|b^2(y)\|x_0-y|^{2-n}\mathrm{d}y\leqslant C\,r^{(\mu-n)/p+2}\|b^2(y)\|_{L^{p,\mu}(B_{2r}(x_0))}. \qquad (4)$$

又由文献[8]中 1.9 式知:

$g(x,y)\geqslant C(\Lambda,n)|x-y|^{2-n},\forall|x-y|\leqslant r/2$, 而且 $|x-y|\leqslant|y-\partial\Omega|/2$, 故由引理 3 得:

$$\int_{B_{r/2}(x_0)}\left|\nabla u(y)\right|^2|x_0-y|^{2-n}\,\mathrm{d}y\leqslant\int_{B_r(x_0)}|\nabla u(y)|^2\cdot g(x_0,y)\mathrm{d}y\leqslant C(\underset{B_r(x_0)}{osc}(u(y))^2+r^{(\mu-n)/p+2}\cdot\|u(y)\|^2_{L^\infty(B_r(x_0))})\leqslant C(1+r^{(\mu-n)/p+2})\cdot(\sup_{x\in B_r(x_0)}|u(x)|)^2. \qquad (5)$$

从而有:

$$|\mathrm{I}_{v1}|\leqslant C_1N_2^{-\alpha}(C\,r^{(\mu-n)/p+2}\|b^2\|_{L^{p,\mu}(B_{2r}(x_0))})^{1/2}\cdot(C(1+r^{(\mu-n)/p+2})(\sup_{x\in B_{4r}(x_0)}|u|)^2)^{1/2}\leqslant CN_2^{-\alpha}\cdot r^{(\mu-n)/(2p)+1}\sup_{x\in B_{4r}(x_0)}|u|(1+r^{(\mu-n)/p+2})^{1/2}.$$

对于 I_{v2} 的估计: 由于 $|y-x_0|\leqslant N_2|x-x_0|$，有 $|y-x|\leqslant(N_2+1)|x-x_0|$；记 $\gamma_3=N_2|x-x_0|$，$\gamma_4=(N_2+1)|x-x_0|$，则利用(2)式:

$$|I_{v2}|\leqslant\int_{|x-y|\leqslant(N_2+1)|x-x_0|}|g(x,y)\|b(y)\nabla u(y)\varphi(y)|\mathrm{d}y+\int_{|x_0-y|\leqslant N_2|x-x_0|}|g(x_0,y)\|b(y)\nabla u(y)\varphi(y)|\mathrm{d}y\leqslant C_1\int_{B_{2\gamma_4}(x)}|b(y)\nabla u(y)\|x-y|^{2-n}\mathrm{d}y+C_2\int_{B_{2\gamma_3}(x_0)}|b(y)\nabla u(y)\|x-y|^{2-n}\mathrm{d}y.$$

在 $B_{2\gamma_3}(x_0)$ 及 $B_{2\gamma_4}(x)$ 上运用(4)式和(5)式的证明方法可得:

$$\int_{B_{2\gamma_3}(x_0)}|b(y)\nabla u(y)\|x_0-y|^{2-n}\mathrm{d}y\leqslant C_1\gamma_3^{(\mu-n)/(2p)+1}(1+\gamma_3^{(\mu-n)/p+2})^{1/2}\sup_{x\in B_{2\gamma_3}(x_0)}|u(x)|\cdot$$

$$\int_{B_{2\gamma_4}(x)}|b(y)\nabla u(y)\|x-y|^{2-n}\mathrm{d}y\leqslant C_2\gamma_4^{(\mu-n)/(2p)+1}(1+\gamma_4^{(\mu-n)/p+2})^{1/2}\sup_{x\in B_{2\gamma_4}(x)}|u(x)|.$$

令 $N_2=N_1=(r/|x-x_0|)^{1/2}$，从而有 $B_{2\gamma_4}(x)\subseteq B_{2\gamma_4+r}(x_0)\subseteq B_{5r}(x_0)$，经计算处理得到:

$$|I_{v1}|\leqslant C(|x-x_0|^{\alpha/2}\,r^{(\mu-n)/(2p)+1-\alpha/2}\cdot(1+r^{(\mu-n)/(2p)+1}))\sup_{x\in B_{4r}(x_0)}|u|,$$

$$|I_{v2}|\leqslant C(r^{(\mu-n)/(4p)+1/2}|x-x_0|^{(\mu-n)/(4p)+1/2}+r^{(\mu-n)/(2p)+1}|x-x_0|^{(\mu-n)/(2p)+1})\sup_{x\in B_{5r}(x_0)}|u|,$$

故

$$|I_v|\leqslant|I_{v1}|+|I_{v2}|\leqslant C(|x-x_0|^{\alpha/2}\,r^{(\mu-n)/(4p)+1-\alpha/2}(1+r^{(\mu-n)/(4p)+1})+r^{(\mu-n)/(4p)+1/2}\cdot|x-x_0|^{(\mu-n)/(4p)+1/2}+r^{(\mu-n)/(2p)+1}\cdot|x-x_0|^{(\mu-n)/(2p)+1})\sup_{x\in B_{5r}(x_0)}|u|.$$

由文献[2]有:

$$|I_1|\leqslant C(\Lambda,n)(|x-x_0|/r)^{\alpha}\sup_{x\in B_{3r}(x_0)}|u(x)|,$$

$$|I_2|\leqslant C(\Lambda,n)(|x-x_0|/r)^{\alpha}\sup_{x\in B_{2r}(x_0)}|u(x)|.$$

综上所述，运算处理后即可得到定理的结论. 证毕.

参考文献:

[1] Aizenman M, Simon B. Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger operators[J]. Comm Pure Appl Math, 1982, 35:209-271.

[2] Chiarenza F, Fabes E, Garofalo N. Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions [J]. Proc Amer Math Soc, 1986, 98(6):415-425.

[3] Kurata K. Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order[J]. Indiana Univ Math Jour, 1994, 43(2): 411-440.

[4] Fazio G D. Hölder-continuity of solutions for some Schrödinger equations[J]. Rend Sem Mat Univ Padova, 1988, 79:173-183.

[5] Chen Yemin. Hölder continuity of solutions for some Schrödinger equations[J]. Journal of Zhejiang University: Sciences Edition, 2000, 27(5):498-502.

[6] Littman W, Stampacchia G, Weinberger H F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1963, 17(3):43-76.

[7] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equation of second order[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983.

[8] Gruter M, Widman K O. The green function for uniformly elliptic equations[J]. Manuscripta Math, 1982, 37:303-342.

Hölder Continuity of Solutions for Some Schrödinger Equations with $L^{p,\mu}(\Omega)$ Coefficients

WANG Shi-yuan[1], TAO Xiang-xing[2*]

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Faculty of Science, Zhejiang University of Science & Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: In this paper, we have proved the local Hölder continuity for the weak solutions of some Schrödinger equations in the divergence form $Lu=-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b\nabla u+vu=0$, with the coefficients $|b|^2, v$ belonging to $L^{p,\mu}(\Omega)(n-2p\leqslant\mu<n)$. Some previous results are extended and refined.

Key words: Schrödinger equation; Green function; Hölder continuity

CLC number: O175.25　　**Document code:** A

（责任编辑　史小丽）