第 22 卷 第 3 期 宁波大学学报（理工版） Vol.22 No.3
2009 年 9 月 JOURNAL OF NINGBO UNIVERSITY (NSEE) Sept. 2009

文章编号:1001-5132（2009）03-0383-04

环上矩阵加权 Moore-Penrose 逆存在的条件

国欣荣，岑建苗*

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要： 讨论了环上元素和矩阵的加权 Moore-Penrose 逆，得到环上矩阵存在加权 Moore-Penrose 逆的充要条件，推广了 Patrico 等所给出的有关结果，获得环上矩阵存在关于 M，N 加权 Moore-Penrose 逆的一个充要条件.

关键词： 加权 Moore-Penrose 逆；矩阵；环；元素

中图分类号： O157.2 **文献标识码：** A

1 预备知识

近年来，很多学者对广义逆和加权广义逆进行了广泛的研究, 1992 年 Prasad 等[1]讨论了一般矩阵的广义 Moore-Penrose 逆. 2004 年 Patrico 等[2]给出了在环上矩阵存在 Moore-Penrose 逆的一个充要条件. 2005 年岑建苗[3]得到了环上矩阵广义 Moore-Penrose 逆存在的条件. 2007 年盛兴平等[4]讨论了环上元素加权 Moore-Penrose 逆的有关结果. 作者主要是把文献[2]中的部分结果推广到环上矩阵加权 Moore-Penrose 逆的情况. 设 R 是包含单位元 1 的环，$Mat(R)$ 表示环 R 上所有有限矩阵构成的集合，$M_m(R)$ 和 $M_{m\times n}(R)$ 分别表示环 R 上所有 $m\times m$ 矩阵和 $m\times n$ 矩阵组成的集合. 设 $*$ 是 R 上的对合反自构关系，则 $*$ 在 $Mat(R)$ 上可诱导 1 个对合反自同构关系，即有 $(A^*)^*=A$，$(AB)^*=B^*A^*$，$(A+B)^*=A^*+B^*$，其中 A,B 满足矩阵相应的运算，$\forall A,B\in Mat(R)$.

定义 1 设 $a\in R$，如果存在 $u\in R$，使得 $a=u^2$，那么称 a 是可开方的，并记 $u=a^{1/2}$.

定义 2[5] 设 R 是具有对合反自同构且含有单位元 1 的环，α，β 是 R 上的 2 个可开方的可逆元. 对 $a\in R$，存在 $b\in R$，使 $aba=a$，$bab=b$，$(\alpha ab)^*=\alpha ab$，$(\beta ba)^*=\beta ba$，称 b 为 a 的关于 α，β 的加权 Moore-Penrose 逆. 若 a 的加权 Moore-Penrose 逆存在，则唯一.

定义 3[4] 设 $A\in M_{m\times n}(R)$，且 $M\in M_m(R)$，$N\in M_n(R)$ 分别是可以开方的可逆矩阵，对于 $A\in M_{m\times n}(R)$，存在 $B\in M_{n\times m}(R)$，使得 $ABA=A$，$BAB=B$，$(MAB)^*=MAB$，$(NBA)^*=NBA$，称矩阵 B 是矩阵 A 关于 M，N 的加权 Moore-Penrose 逆. 若 A 的加权 Moore-Penrose 逆存在，则唯一.

定义 4 令 X，Y 分别具有对合关系 ℓ，τ 的环，我们称 $\phi: X\mapsto Y$ 是 ℓ，τ 不变同态的充要条件是 ϕ 是环同态，且 $\phi(x^{\ell})=(\phi(x))^{\tau}$，$\forall x\in X$. 如果 ℓ，τ 相同时，则把 ℓ，τ 不变同态称为 τ 不变，也称 ϕ 与 τ 可以交换. 映射 $\varphi_A: AA^+_{MN}M_m(R)AA^+_{MN}\mapsto A^+_{MN}AM_n(R)A^+_{MN}A$ 有 $\varphi_A(AA^+_{MN}XAA^+_{MN})=A^+_{MN}XA$，$\forall X\in$

收稿日期：2008-05-16. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：浙江省自然科学基金（Y607026）.
第一作者：国欣荣（1981－），男，浙江宁波人，在读硕士研究生，主要研究方向：矩阵的有理逼近. E-mail:g06c07010121@email.nbu.edu.cn
*通讯作者：岑建苗（1959－），男，浙江慈溪人，教授，主要研究方向：矩阵的有理逼近. E-mail: cjmlx@nbu.edu.cn

$M_m(R)$, 若映射 φ_A 是 $*-$ 不变，即 $A^* X (A^+_{MN})^* = A^+_{MN} XA$ 时，则称矩阵 A 是 $*-$ 不变.

2 加权 Moore-Penrose 广义逆的推广

引理 1 设 R 是含单位元 1 的环，a, b 是环 R 上分别具有加权 Moore-Penrose 广义逆 $a^+_{\alpha\beta}$，$b^+_{\alpha\beta}$. 若 $a^*\alpha b=\alpha\beta^{-1}b^*=0$，且 $\alpha^*=\alpha$，$\beta^*=\beta$，则 $(a+b)^+_{\alpha\beta}=a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta}$.

证明 由 $a^*\alpha b=\alpha\beta^{-1}b^*=0$ 可知:

$$ab^+_{\alpha\beta}=ab^+_{\alpha\beta}bb^+_{\alpha\beta}=a\beta^{-1}(\beta b^+_{\alpha\beta}b)b^+_{\alpha\beta}= a\beta^{-1}(\beta b^+_{\alpha\beta}b)^* b^+_{\alpha\beta}=a\beta^{-1}b^*(\beta b^+_{\alpha\beta})^* b^+_{\alpha\beta}=0,$$

$$a^+_{\alpha\beta}b=a^+_{\alpha\beta}aa^+_{\alpha\beta}b=a^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1}(\alpha aa^+_{\alpha\beta})b= a^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1}(\alpha aa^+_{\alpha\beta})^* b=a^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1}(a^+_{\alpha\beta})^* a^*\alpha^* b= a^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1}(a^+_{\alpha\beta})^* a^*\alpha b=0.$$

由 $a^*\alpha b=a\alpha^{-1}b^*=0$，且 $\alpha^*=\alpha$，$\beta^*=\beta$ 可知: $b^*\alpha a=b\beta^{-1}a^*=0$，与前面同理可证，$ba^+_{\alpha\beta}=b^+_{\alpha\beta}a=0$，

$$\Rightarrow (a+b)(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta})(a+b)= aa^+_{\alpha\beta}a+bb^+_{\alpha\beta}b=a+b,$$

$$(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta})(a+b)(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta})= a^+_{\alpha\beta}aa^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta}bb^+_{\alpha\beta}=a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta},$$

$$(\alpha(a+b)(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta}))^*=(\alpha aa^+_{\alpha\beta}+\alpha bb^+_{\alpha\beta})^*= (\alpha aa^+_{\alpha\beta})^*+(\alpha bb^+_{\alpha\beta})^*= \alpha aa^+_{\alpha\beta}+\alpha bb^+_{\alpha\beta}=\alpha(a+b)(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta}),$$

$$(\beta(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta})(a+b))^*=(\beta a^+_{\alpha\beta}a+\beta b^+_{\alpha\beta}b)^*= (\beta a^+_{\alpha\beta}a)^*+(\beta b^+_{\alpha\beta}b)^*=\beta(a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta})(a+b),$$

所以 $(a+b)^+_{\alpha\beta}=a^+_{\alpha\beta}+b^+_{\alpha\beta}$.

定理 1 R 是含单位元 1 的环，且 $e\in R$ 有 $e^2=e=e^*$，而 α，β 是 R 上的可开方的可逆元且 $\alpha^*=\beta$，$\beta^*=\beta$，则 $f=\alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}$ 存在关于 α，β 加权 Moore-Penrose 逆: $f^+_{\alpha\beta}=\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}\cdot e\alpha^{1/2}$ 的充要条件是 $h=\alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}+\alpha^{-1/2}(1-e)\beta^{1/2}=f+g$ 存在关于 α, β 加权Moore-Penrose逆 $h^+_{\alpha\beta}$，且 $h^+_{\alpha\beta}=f^+_{\alpha\beta}+g^+_{\alpha\beta}$.

证明 (i) $(\Rightarrow)$ 若 $f^+_{\alpha\beta}$ 存在，且 α，β 是 R 上的可开方的可逆元，则 $\alpha^{1/2}$，$\beta^{1/2}$ 的可逆元 $\alpha^{-1/2}$，$\beta^{-1/2}$ 也存在，容易验证 $g^+_{\alpha\beta}$ 也存在.

$$f^*\alpha g=\beta^{1/2}(exe)^*\alpha^{-1/2}\alpha\alpha^{1/2}(1-e)\beta^{1/2}= \beta^{1/2}(exe)^*(1-e)\beta^{1/2}= \beta^{1/2}(exe-e(exe))^*\beta^{1/2}=0.$$

$$f\beta^{-1}g^*=\alpha^{-1/2}exe(1-e)\alpha^{-1/2}=0.$$

由引理 1 可知 $h^+_{\alpha\beta}=f^+_{\alpha\beta}+g^+_{\alpha\beta}$.

(ii) $(\Leftarrow)$ 若 $h^+_{\alpha\beta}$ 存在，现令 $H=\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\cdot\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2}$，由 $hh^+_{\alpha\beta}h=h$ 可知:

$$\alpha^{-1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}= \alpha^{-1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}\Rightarrow (exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}(exe+1-e)= exe+1-e.$$

左右两边乘以 e，则

$$exe\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}exe=exe^2\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}exe=exe\Rightarrow exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2}\alpha^{-1/2}exe=exe.$$

再在两边同时分别乘以 $\alpha^{-1/2}$，$\beta^{1/2}$，可得:

$$\alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2}\alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}= \alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}$$，即:

$$fHf=f. \tag{1}$$

$$(\alpha hh^+_{\alpha\beta})^*=(\alpha\alpha^{-1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta})^*= \alpha hh^+_{\alpha\beta}=\alpha\alpha^{-1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\Rightarrow (\alpha^{1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta})^*= \alpha^{1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\Rightarrow (\alpha^{1/2}(exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2})^*= (exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\Rightarrow ((exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2})^*= (exe+1-e)\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}.$$

左右边同时乘以 e，则

$$\Rightarrow (exe\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e)^*=exe\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e\Rightarrow (exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e)^*= exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}\Rightarrow (\alpha^{1/2}exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2})^*= \alpha^{1/2}exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\Rightarrow (\alpha\alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2})^*= \alpha\alpha^{-1/2}exe\beta^{1/2}\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h^+_{\alpha\beta}\Rightarrow$$

$$(\alpha fH)^*=\alpha fH. \tag{2}$$

类似可证

$$(\beta fH)^* = \beta fH. \tag{3}$$

现证 $f_{\alpha\beta}^{+}$ 存在，且 $f_{\alpha\beta}^{+} = HfH$.

由(1)式可知：

$$f(HfH)f = fHf = f,\ (HfH)f(HfH) = HfH.$$

由(2)式可知：

$$(\alpha fHfH)^* = (\alpha fH)^* = \alpha fH = \alpha f(HfH).$$

由(3)式可知：

$$(\beta HfHf)^* = \beta Hf = \beta(HfH)f.$$

所以 $f_{\alpha\beta}^{+}$ 存在，且 $f_{\alpha\beta}^{+} = HfH$.

容易验证

$g_{\alpha\beta}^{+} = \beta^{-1/2}(1-e)\beta^{1/2}$， $\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}g_{\alpha\beta}^{+}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2} = \beta^{-1/2}(e(1-e))\alpha^{1/2} = 0$，由(1)式知，$h_{\alpha\beta}^{+} = f_{\alpha\beta}^{+} + g_{\alpha\beta}^{+}$，即

$$\begin{aligned} H &= \beta^{-1/2}e\beta^{1/2}h_{\alpha\beta}^{+}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2} = \\ &\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}(f_{\alpha\beta}^{+} + g_{\alpha\beta}^{+})\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2} = \\ &\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}f_{\alpha\beta}^{+}\alpha^{-1/2}e\alpha^{1/2}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{+} &= HfH = \beta^{-1/2}e\beta^{1/2}f_{\alpha\beta}^{+}\alpha^{-1/2}e^{1/2}e^{-1/2}exe\beta^{1/2}\cdot \\ &\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}f\alpha\beta^{-1/2}exe\beta^{1/2} = \\ &\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}f_{\alpha\beta}^{+}ff_{\alpha\beta}^{+}\alpha^{-1/2}exe\alpha^{1/2} = \\ &\beta^{-1/2}e\beta^{1/2}f_{\alpha\beta}^{+}\alpha^{-1/2}exe\alpha^{1/2} = H. \end{aligned}$$

定理 2 设定 R 是包含有单位元 1 的环，$A \in M_{m\times n}(R)$，且 $M \in M_m(R)$，$N \in M_n(R)$ 分别是可开方的可逆矩阵. 若 A_{MN}^{+} 存在，$(A_{MN}^{+})^*A^* = AA_{MN}^{+}$，且 A 具有 $*-$ 不变. 令 $P = M^{-1/2}(AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+})N^{1/2}$，$Q = M^{-1/2}(I_m - AA_{MN}^{+})N^{1/2}$，$R = N^{-1/2}(A_{MN}^{+}BA)M^{1/2}$，$S = N^{1/2}$. $S = N^{1/2}(I_n - AA_{MN}^{+})M^{-1/2}$，其中 $\Gamma = P+Q$，$\Omega = R+S$，则 Γ 存在关于 M，N 加权 Moore-Penrose 逆 Γ_{MN}^{+} 的充要条件是 Ω 存在关于 N，M 加权 Moore-Penrose 逆 Ω_{NM}^{+}.

证明 (i) $(\Rightarrow)$ 若 Γ_{MN}^{+} 存在时，则 P_{NM}^{+} 存在，且容易验证 Q_{MN}^{+}，S_{NM}^{+} 存在.

由引理 1 可知，若 P_{MN}^{+} 存在，则

$$\Gamma_{MN}^{+} = P_{MN}^{+} + Q_{MN}^{+}.$$

$$\begin{aligned} PP_{MN}^{+}P &= M^{-1/2}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AA_{MN}^{+}\cdot \\ &BAA_{MN}^{+}N^{1/2} = M^{-1/2}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2} = P \Rightarrow \\ &AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+} = \\ &AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}. \end{aligned}$$

左右两边分别乘以 A，A_{MN}^{+}，可得：

$$A_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AA_{MN}^{+}BA = A_{MN}^{+}BA.$$

左右两边分别乘以 $N^{-1/2}$，$M^{1/2}$，可得：

$$\begin{aligned} &N^{-1/2}A_{MN}^{+}BAM^{1/2}M^{-1/2}A_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}\cdot \\ &N^{-1/2}A_{MN}^{+}BAM^{1/2} = N^{-1/2}A_{MN}^{+}BAM^{1/2}. \end{aligned}$$

现令 $H = M^{-1/2}A_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}$，

$$\Rightarrow RHR = R. \tag{4}$$

类似可证

$$HRH = H. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} (MPP_{MN}^{+})^* &= (MM^{-1/2}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+})^* = \\ &M^{1/2}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2})^* = \\ &AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}. \end{aligned}$$

左边乘以 A^*，且由 $(A_{MN}^{+})^*A^* = AA_{MN}^{+}$，

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A)^* = \\ &A^*AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2} = \\ &A^*(A_{MN}^{+})^*A^*BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}. \end{aligned}$$

由 A 的 $*-$ 不变性质，可知：

$$A^*B(A_{MN}^{+})^* = A_{MN}^{+}BA,$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A)^* = \\ &A^*(A_{MN}^{+})^*A^*BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2} = \\ &A^*B(A_{MN}^{+})^*A^*N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2} = \\ &A_{MN}^{+}BAA^*N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}. \end{aligned}$$

右边乘以 $(A_{MN}^{+})^*$，可得：

$$\begin{aligned} &(A_{MN}^{+}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A)^* = \\ &(A_{MN}^{+}AA_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A)^* = \\ &A^*B(A_{MN}^{+})^*A^*N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}(A_{MN}^{+})^* = \\ &A_{MN}^{+}BAA^*N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}(A_{MN}^{+})^*. \end{aligned}$$

由 A 的 $*-$ 不变性质，可知：

$$\begin{aligned} &A^*N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}(A_{MN}^{+})^* = \\ &A_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (A_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A)^* = \\ &A_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}A. \end{aligned}$$

两边同时乘以 $N^{1/2}$，得:

$$(NN^{-1/2}A_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2})^{*}=$$
$$NN^{-1/2}A_{MN}^{+}BAA_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}=$$
$$(NN^{-1/2}A_{MN}^{+}BAM^{-1/2}M^{1/2}A_{MN}^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}\cdot$$
$$AN^{1/2})^{*}=(NN^{-1/2}A_{MN}^{+}BAM^{-1/2}M^{1/2}A_{MN}^{+}\cdot$$
$$N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2},$$
$$\Rightarrow (NRH)^{*}=NRH. \tag{6}$$

类似可证

$$(MHR)^{*}=MHR. \tag{7}$$

由(4)~(7)式可知，R_{NM}^{+} 存在，且 $R_{NM}^{+}=H=M^{-1/2}A^{+}N^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}$. 由(1)式可得:

$\Omega_{NM}^{+}=R_{NM}^{+}+S_{NM}^{+}$，即

$$\Omega_{NM}^{+}=M^{-1/2}AN^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}+S_{NM}^{+}.$$

容易验证$\Rightarrow$ $M^{-1/2}AN^{1/2}Q_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}=0$，则

$$M^{-1/2}AN^{1/2}\Gamma_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}=$$
$$M^{-1/2}AN^{1/2}(P_{MN}^{+}+Q_{MN}^{+})M^{-1/2}AN^{1/2}=$$
$$M^{-1/2}AN^{1/2}P_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}=R_{NM}^{+}.$$

所以 $\Omega_{NM}^{+}=M^{-1/2}AN^{1/2}\Gamma_{MN}^{+}M^{-1/2}AN^{1/2}+S_{NM}^{+}$.

(ii) ($\Leftarrow$) 若 Ω_{NM}^{+} 存在，则 R_{NM}^{+} 存在．由(i)逐步可推得 Γ_{NM}^{+} 存在.

$$\Gamma_{MN}^{+}=N^{-1/2}AM^{1/2}R_{MN}^{+}N^{-1/2}AM^{1/2}+Q_{MN}^{+}=$$
$$N^{-1/2}AM^{1/2}\Omega_{MN}^{+}N^{-1/2}AM^{1/2}+Q_{MN}^{+}.$$

参考文献:

[1] Prasad K M, Bapat R B. The generalized Moore-Penrose inverse[J]. Linear Algebra Appl, 1992, 165:59-69.

[2] Patrico P, Puystjens R. Generalized invertibility in two semigroups of a ring[J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 377:125-139.

[3] 岑建苗．环上矩阵广义 Moore-Penrose 逆的存在性[J]. 数学学报, 2005, 49:549-558.

[4] Sheng Xingping, Chen Guoliang. The generalized weighted Moore-Penrose inverse[J]. Appl Math Computing, 2007, 25(1-2):407-413.

[5] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverse: Theory and applications[M]. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2003.

On Existence of Weighted Generalized Moore-Penrose Inverse of Matrix over Ring

GUO Xin-rong, CEN Jian-miao*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The weighted Moore-Penrose ineverse of the elements and matrix over ring is discussed, and a necessary and sufficient condition is derived for existence of the weighted Moore-Penrose inverse. The research generalizes the related result which Patrico, et al have previously given.

Key words: the weighted Moore-Penrose inverse; matrix; ring; elements

CLC number: O157.2 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）