

# 数学中用“菱形面积”定义正弦的教学实验

崔雪芳

(宁波教育学院 信息与艺术学院, 浙江 宁波 315010)

**摘要:** 在传统的数学教材中, 三角函数的教学从“比值”引入以“数”为逻辑线索展开, 推理严密、层次分明、数学抽象性强. 实验以张景中院士“用面积方法建立三角学, 用单位菱形面积引入正弦”的整体设计思想为背景, 在初一年级进行以“单位菱形面积”定义正弦引入三角函数的教学研究, 旨在拓展学生对正弦概念的“形”的思考, 促进学生在后续数学学习中数和形的融合, 为重建三角函数的教学逻辑体系打下初期的教学实验基础.

**关键词:** 数学; 用面积定义正弦; 教学实验

中图分类号: N45

文献标识码: A

文章编号: 1001-5132 (2011) 02-0128-05

## 1 问题的提出

数学教育改革是社会发展的诉求. 我国新一轮数学课程改革使数学教育面向全体学生, 体现数学为大众的思想, 体现学生发展的思想, 体现学习方式、教学方式、评价方式、教材呈现方式的转变. 这其中既有对数学课程结构作出的重大调整, 同时也包括了数学课程内容进行的再选择和再组织, 从而对我国数学教育产生了全局性和根基性的影响, 对初中数学课程而言, 尤为如此<sup>[1]</sup>.

在数学课程中, 三角函数至关重要. 三角函数是联系几何与代数的一座桥梁, 沟通初等数学和高等数学的一条通道. 函数、向量、坐标、复数等许多重要的数学知识与三角函数有关, 大量的实际问题的解决要用到三角函数知识<sup>[2]</sup>. 因此, 国内外的许多数学教育改革, 都对三角函数的内容取舍十分谨慎. 在传统的数学课程中, 三角函数是作为直角三角形的两边的比值而引进的, “数”的线索十分鲜明. 但从根本上说, 三角函数的定义, 无非是给三角函数提供一个几何模型, 所以, 引导学生以“形”的思考, 无疑为三角函数教学提供了一条新的逻辑线路.

基于此, 张景中院士提出“用面积方法建立三

角学”的整体设想. 即从小学数学课程中的三角形面积的计算公式出发, 用单位菱形面积引入正弦, 转抽象的直角三角形“对边比斜边”定义为形象的“单位菱形面积”定义<sup>[2]</sup>. 并且认为, 通过这样一种“数形转换”使得三角函数这原本属于高中数学课程的内容也可以在初中一年级时进行学习. 在张景中院士观点的基础上, 张奠宙先生提出了“ $\sin A$  是单位正方形面积变为单位菱形面积时所打的‘折扣’”的观点, 这一形象的说法又赋予了“ $\sin A$ ”更为具体、形象的代数涵义<sup>[3]</sup>.

受两位先生观点的启发, 我萌发了对两位先生所提出的观点进行教学实验的构想, 首先在初一以“单位菱形面积”定义正弦引入三角函数, 为“重建三角”的教学逻辑体系打下初期的实验基础.

## 2 研究目的和方法

### 2.1 研究目的与假设

实验研究的主要目的是探究在初中一年级数学课程中以“单位菱形面积”定义正弦引入三角函数的可行性. 这项研究假定了在初中一年级数学课程中以“单位菱形面积”定义正弦引入三角函数是可行的, 并能通过课堂教学为学生所理解和掌握.

## 2.2 研究问题

为达到以上的研究目的, 本实验所研究的问题包括: (1)在教学过程中, 利用“单位菱形面积”, 能否帮助学生理解正弦概念、初步掌握正弦涵义? (2)在教学过程中, 利用“单位正方形面积变为单位菱形面积时所打的‘折扣’”, 能否帮助学生理解正弦定义、三角形面积、边角和正弦的联系? (3)通过课堂教学, 学生是否能掌握正弦的基本性质, 并能作简单的运用?

## 2.3 研究方法

研究采用教育实验的方法, 通过对初一学生进行教学实验, 从而探讨在初一数学课程中以“单位菱形面积”定义正弦引入三角函数的可行性. 作为教育“准实验”, 研究不设置对照组, 只是通过教学过程中的引导练习和课堂练习来检验教学的成效性.

## 2.4 研究对象

研究针对性地抽取了宁波市4所初中的7个班级作为实验班, 依次编号为东恩中学(1)、十五中学实验学校(1)和(2)、宁波新城第一实验学校(1)和(2)、兴宁中学(1)和(2). 这4所学校分别代表宁波城区生源较好学校、生源一般学校、城乡结合部学校和城区重点学校4种类型.

## 2.5 研究意义

正如张景中院士所言<sup>[4]</sup>, “数学课程中, 三角至关重要. 三角是联系几何和代数的一座桥梁, 沟通初等数学和高等数学的一条通道”. 对中学三角函数的数学课程进行研究, 不仅有利于展开中学三角函数的内涵, 也可以通过重新定位三角函数对整个中学数学课程产生积极的影响, 丰富数学的课程和教育理论.

实践层面上, “在传统的课程中, 三角函数是作为直角三角形的两边的比值而引进的. 这样的定义, 依赖于有关相似三角形的知识, 而且只能定义锐角的三角函数”. 而以单位菱形面积引入正弦, 不仅降低了难度, 使正弦函数不再依赖相似的知识, 同时也拓宽了范围, 由锐角拓展到锐角、直角和钝角的正弦都有定义, 更不必像传统定义中用逼近的办法来解释直角的正弦. 更为重要的是, 这也使学生在整个学习过程中的数学思维发生了变化, 由原先的单一的“数”的思维转向

“数形结合”的思维.

## 3 实验过程

### 3.1 教学设计的初期构想及教学实施

#### 3.1.1 教学目标设定

教学实验限定课时为1课时, 教学内容为“认识和理解三角函数中的正弦函数”, 即从已学的三角形面积的计算公式出发, 用单位菱形面积引入正弦, 以较为直观的“单位菱形面积”来定义较为抽象的正弦函数. 设定该课的教学目标为<sup>[5]</sup>: (1)利用“面积”过渡, 了解正弦概念, 初步理解正弦涵义. (2)利用“折扣”这个直观的前概念探究三角形的面积、边角与正弦的联系. (3)探究正弦的基本性质, 并能作简单的运用.

#### 3.1.2 教学环节安排

根据以上设定的教学目标, 设计安排了如下4个教学环节:

教学环节一: 认识正弦. 主要解决用单位菱形面积去定义正弦, 即用“面积”这个形象的前概念去帮助认识正弦概念.

教学环节二: 正弦再理解. 即在引入正弦概念后, 借用“折扣”这个直观的前概念, 教师帮助学生较为全面地理解并掌握正弦含义.

教学环节三: 探究正弦性质. 通过单位菱形面积的变化得出正弦的基本性质; 利用正弦定义得到平行四边形、三角形的面积计算公式.

教学环节四: 正弦再认识. 即用正弦定义和“折扣”概念, 解决三角形的面积、边角与正弦的关系(一个锐角 $A$ 的正弦等于这个角的对边与斜边之比).

在教学实施的具体安排中, 每个学校的第1节教学实验课都由同一位教师实施教学, 教案设计基本相同. 第2节教学实验课分别由前来参加研讨的本学校的教师实施教学, 教学设计有部分变化, 但主要教学环节基本相同. 并在这几个阶段的教学过程中穿插教师引导下的例题练习和学生自己完成的课堂练习<sup>[5]</sup>.

#### 3.1.3 课堂教学形成性检验

为了检验课堂教学效果, 实验研究要求学生在下课时统一上交课堂练习, 并以此作为纸笔测试的依据, 检验课堂教学的成效. 课堂教学完成后,

我们对 4 所中学各个班级学生的课堂练习得分情况进行了统计. 需要加以补充的是, 由于从前几堂课学生完成练习的情况来看, 该练习题对考察学生在拓展应用、问题解决型的练习中所起到的效果不是很充分, 因此在后面上课的 4 个班中, 在练习三中加了 1 个小题以进一步判断学生通过这一课堂教学在对认识正弦函数的基础上能否进一步加以拓展应用. 4 所不同类型学校的 7 个班级学生形成性检验结果见图 1~图 3.

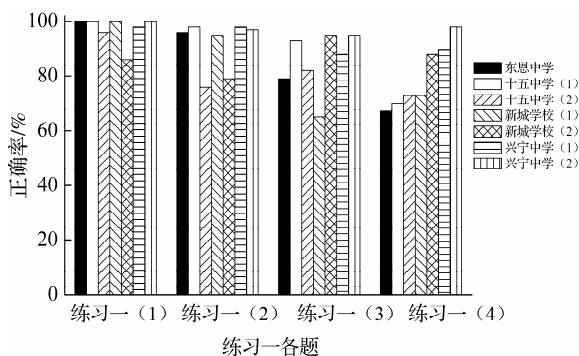


图 1 练习一正确率

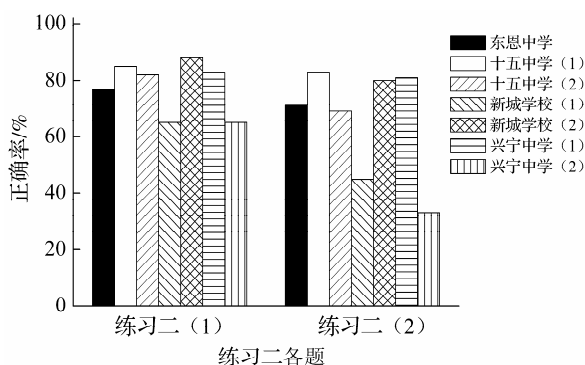


图 2 练习二正确率

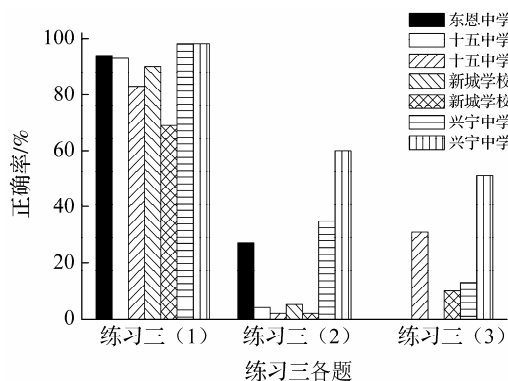


图 3 练习三正确率

从图 1~图 3 的得分情况, 我们看到:

(1) 从整体得分看, 学生已较好地掌握了用菱

形面积、折扣定义的正弦概念, 较为顺利地达成了本节课教学目标. 总体来说, 本节课的教学设计合理, 教学层次安排有序, 教学逻辑顺序符合教学设计要求、符合学生学习特点.

(2) 从课堂练习的设置看, 练习一总体得分较高, 说明学生对基础知识、基本技能掌握较好, 知识目标达成度较高; 练习二得分较练习一低, 说明学生对知识联系、变式训练及初步运用等技能还需进一步熟练; 练习三得分最低, 但练习三中 2 个小题得分差异较大, 这除了题目设定的落差原因之外, 还反映了学生在综合运用、形数转换和变式能力的不足.

(3) 形成性练习的得分情况与学生的认知情况相当吻合, 这就意味着, 只要在课堂教学中把握教学目标、合理设计教学过程, 用“菱形面积”定义正弦的教学安排是可行的. 但是, 从练习一到练习三得分的落差所反映的 3 个维度教学目标的达成度, 也从另一个角度说明了要真正形成三角函数的知识框架和思维习惯还需在后续学习中逐渐补充和完善.

### 3.2 教学设计的调整

#### 3.2.1 一次课后讨论的启发

“用‘菱形面积’定义正弦”的课堂教学的第一轮教学实验取得了较为满意的结果, 并获得了第一手的形成性检验数据. 我们又在宁波市兴宁中学组织了由部分初中数学教师和宁波市农村初中数学骨干教师参加的课堂设计的科学性和有效性专题研讨, 对该课教学提出了以下建议:

(1) “用‘菱形面积’定义正弦”安排 1 课时教学容量过大, 新知识太多, 不利于学生一下子都接受, 有些内容也没必要在 1 节课内讲完; 适当增加课时有利于巩固、有利于拓展.

(2) 教学环节设计不够简洁, 内容安排没有跳出原有教学逻辑框架, 如最后导出的“ $\sin\alpha$ 等于对边比斜边”, 还是回到原地, 没有完全达到重建三角、全盘皆活, 让学生学得轻松自如的效果. 且把三角比拿出来, 对该课教学内容没有多大意义.

(3) 可重新安排教学内容, 通过三角形面积恒等变形, 直接导出正弦定理.

#### 3.2.2 调整后的教学环节安排及形成性检验

根据以上建议, 我们对该教学内容进行了调

整,又在宁波市兴宁中学进行同一课题、不同教学内容的对照实验。

调整后主要教学内容和教学环节安排如下:

教学环节一:认识正弦.用单位菱形一个内角变化引起面积的变化引入新课,引出正弦定义;指出:(1) $\sin$ 是一个符号,与绝对值符号、根号符号是一样意义的.(2) $\sin\alpha$ 的实际意义表示一个内角为 $\alpha$ 的单位菱形面积.

教学环节二:讨论引申.通过单位菱形的面积的变化得出正弦的基本性质:(1) $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$ ;(2) $\sin 90^\circ = 1$ ;(3) $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ ;(4)当 $\alpha$ 为锐角时, $\alpha$ 越大 $\sin\alpha$ 就越大.

教学环节三:突破难点.通过菱形边长的改变和正弦定义得到平行四边形、三角形的面积计算公式.

教学环节四:阶段巩固.

教学环节五:探究正弦定理.探究三角形3个角与3条边的关系,得出正弦定理.

以上每个环节都配有一定量的练习题,以巩固所学的知识,课后进行课堂练习.当然在这节实验课中,把课后测试题三(2)放在学完三角形面积公式之后作为合作学习内容.

调整设计后的教学实验课,时间安排相对合理,教学过程较为顺畅,学生接受比较顺利.我们对兴宁中学初中部一个班级的49名同学进行了该教学实验,其中全部做对的有16名学生(表1).从教学效果的形成性检验的结果看,调整设计后教学效果良好.

表1 形成性检验结果(正确率) %

练习一		练习二		练习三				
1	2	3	4	1	2	1	2	3
98	98	98	100	86	69	94	例题已讲	71

为了进一步检验这种教学设计,使教学实验更具有可行性,我们再次选择宁波新城实验学校进行课堂教学实验,由该校老师执教,教学内容与环节基本与上述相同.在上新课内容之前,插入了对张景中院士的介绍,提升数学学习的情感因素.教学中,没有采用几何画板等多媒体手段,教具用执教老师自制的平行四边形活动木框.本次教学实验后进行了同样的形成性检验,全班35个学生,其中6个学生全对,测试结果见表2.

表2 再次教学实验的形成性检验结果(正确率) %

练习一		练习二		练习三				
1	2	3	4	1	2	1	2	3
100	94	89	94	63	60	100	合作学习	71

#### 4 结论

总结近2年时间在生源结构不同的4所初中的教学实验,以及教师、专家访谈,我们认为:在初一年级的数学教学中“以‘单位菱形面积’定义正弦引入三角函数”是可行的;“用面积方法建立三角学”有利于初中学生构建三角函数直观的数学模型,形成多方面的数学学习方法,多角度把握“数学本质”.我们发现“重建三角”的学科逻辑十分有利于中学生的数学学习.

由此,我们又设想:在进一步实验的基础上,先从“地方或校本课程”的教学实验开始,以获得实验数据,最后实现“‘重建三角’学科逻辑体系”的整体目标.

但在具体的实验过程中,教师确定的教学内容、教学设计、教学实施过程及学生原有的数学学习基础的差异都会不同程度地影响教学目标的达成,也会影响后续学习的有效进行.因此,有必要对上述实验结论进一步作如下说明:

(1)在初一数学教学中以“菱形面积”定义正弦是可行的.从课堂练习的整体得分看,通过课堂教学,学生已较好地掌握了用菱形面积、折扣定义的正弦概念,较为顺利地达到了教学目标.用直观的“面积”引入较为抽象的“正弦”概念,由于抽象概念的形象描述,克服了以往正弦概念教学中从抽象到抽象的弊端,降低了教学台阶.

(2)部分学生对正弦定义的运用和拓展类问题的解决上尚存在一定困难.从课堂练习的完成情况看:学生对本节课的基础知识、基本技能掌握较好,知识目标的达成度较高;对本节课的知识联系、变式训练及初步运用等技能还需进一步熟练;而在综合运用及形、数转换等方面的能力尚显不足.且不少学生对于涉及解题策略问题以及正弦的运用和拓展类问题的解决上还是存在着一定的困难.出现这一情况,一方面可能与课时所限有关,教师在1个课时内完成设定的教学内容困难较大;另一方面也可能与学生的学习习惯有关,长期的以掌

握陈述性知识为主的学习习惯使得学生在面对程序性知识,即如何运用正弦定义解决问题时就显得心有余而力不足了,要真正形成三角函数的知识框架和思维习惯还需在后续学习中逐渐补充和完善.

(3)以“菱形面积”定义正弦有利于促进学生“数形结合”的数学思维的形成和发展.同时,从这几堂课的教学实施情况来看,我们发现:1)用直观的“面积”、“折扣”引入较为抽象的“正弦”概念,使学生掌握新概念更为顺利,克服了以往正弦概念教学中从抽象到抽象的弊端.2)以“面积”、“折扣”为过渡性概念作铺垫,教学引伸比较顺利,变式训练的难度大大降低.学生在学习过程中始终保持浓厚的兴趣,对后续学习产生了强烈的期待,学习的动力被进一步激发.3)从数学思维的培养角度分析,“面积”的引入拓展了学生对正弦概念的“形”的思考,而“折扣”的引入又启动了学生的“数”的思维.这种全新的课程逻辑体系将有利于学生数和形的融合,使后续学习的思维空间得到整体的拓展,防止了数学整体思维的人为割裂.

在“用‘菱形面积’定义正弦”的教学实验中,“面积”、“折扣”并不是该课教学的目标性概念,而是一个有用的、为引入和理解正弦涵义的形象的过渡性概念.“面积”、“折扣”的引入不但有利于降低学习的台阶、降低教学的难度,更为重要的是,通过这两个过渡性概念的引入,在三角、几何、代数间搭建了一个互相联系的思维通道,使学生在这一短短的一节课里产生了一次从数到形、又从形到数的思维飞跃.

#### 参考文献:

- [1] 慕春霞. 数学课程论与数学课程教材改革[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001:77.
- [2] 张景中. 三角下放 全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个方案[J]. 数学通报, 2007(1):1-5.
- [3] 张奠宙. 让我们来重新认识三角——兼谈数学教育要在数学上下工夫[J]. 数学教学, 2006(10):5-6.
- [4] 张景中. 重建三角 全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个方案[J]. 数学教学, 2006(10):封二.
- [5] 崔雪芳. 用“菱形面积”定义正弦的一次教学探究[J]. 数学教学, 2008(11):40-43.

## Trial: Defining Sine by Diamond Area in Junior High School Mathematics

CUI Xue-fang

(School of Information Sciences and Arts, Ningbo Education College, Ningbo 315010, China)

**Abstract:** In traditional mathematics material, the teaching on trigonometric functions usually begins with ratio and develops with number, which features close reasoning, clear structure and strong mathematical abstraction. To introduce the concept of “shape” in sine definition for elementary school students, the thinking of number and shape can thus be combined, which is conducive to the subsequent teaching and learning process. In this paper, the “unit area of diamond” is used to define trigonometric functions in grade 7 based on the design proposed by Academician Zhang Jing-zhong which establishes trigonometry through area and introduces sine function by unit area of diamond. The purpose of this article is to lay the foundation for primary understanding the trigonometric functions for elementary school students, and improve teaching efficiency.

**Key words:** mathematics; define sine by area; teaching experiment

(责任编辑 史小丽)