电动力学

第二十一讲

西安石油大学理学院
应用物理系

3. 矩形波导中电磁波的空间分布

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(x,y)e^{ik_z z}e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H}(\vec{x},t)=\vec{H}(x,y)e^{ik_z z}e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}=0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$E_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}+\mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial y}\right] \quad E_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}-\mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]$$

$$H_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}-\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial y}\right] \quad H_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}+\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]$$

$$E_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}+\mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial y}\right]$$

$$H_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}-\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]$$

$$E_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}-\mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]$$

$$H_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}+\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]$$

- 只要求出了H_z和E_z，则整个波导内的场即全部确定
- 波导中电场与磁场强度的六个分量中只有两个是独立的
- 设E_z，H_z作为独立分量

1) $E_z=0$，$H_z\neq0$时，电场是横波，该种波模称为横电波或TE波，全部场量由H_z确定

2) $E_z\neq0$，$H_z=0$时，磁场为横波，该种波模称为横磁波或TM波，全部场量由E_z确定

$$E_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}+\mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial y}\right]$$

$$H_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}-\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]$$

$$E_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}-\mu\omega\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]$$

$$H_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}\left[k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}+\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]$$

3) 可证明，波导中不可能存在$E_z=0$，$H_z=0$的横电磁波

$$k_x=\frac{m\pi}{a}\qquad k_y=\frac{n\pi}{b}$$

$$m,n\in\{0,1,2\ldots\}$$

k_x，k_y完全由波导的尺寸决定，且需是π的整数倍。决定k_x，k_y的m，n为x，y方向上驻波的半波个数，故一组m，n可确定两组波模：TE_{mn}，TM_{mn}，它们可独立传播，亦可以相互叠加

4．截止频率

1）$\vec{k}$ ——为波导空间的圆波数，它由激发电磁波的频率确定：

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

2）k_z——为$\vec{k}$ 的z分量，它决定了波导中电磁波的传播因子

3）k_x，k_y—— $\vec{k}$ 的x，y分量。它们决定了波导横截面上的波模，其自身由波导的尺寸及波模数决定

$$k_x=\frac{m\pi}{a} \qquad k_y=\frac{n\pi}{b} \qquad m,n\in\{0,1,2\ldots\}$$

$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$ → $k_z^2=k^2-(k_x^2+k_y^2)$

$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$k^2<k_x^2+k_y^2$ →

→ k_z为虚数

$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(x,y)e^{ik_z z}e^{-i\omega t}$

→ 波导中的电磁波不再是沿z轴传播的波，而变为了沿z轴方向衰减的电磁振荡

截止频率：能够在波导内传播的波的最低频率

$k^2=k_x^2+k_y^2$ → $$\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}$$

- 由于a，b不同，则ω_c不同，因此可知，波导管的尺寸决定了各种波模的最低频率
- 不同波模，即不同m，n的ω_c也不同

例如：对于TE波中，当a>b时，最低截止频率的波模为TE_{10}波，其频率和波长分别为 $\omega_{c,10} = \pi/(a\sqrt{\varepsilon\mu})$ $\lambda_{c,10}$=2a；当a<b时，最低截止频率的波模为TE_{01}波，其频率和波长分别为$\omega_{c,01} = \pi/(b\sqrt{\varepsilon\mu})$，$\lambda_{c,01}$=2b；因此，在波导内能够通过的最大波长为2max$\{a,b\}$

5. TE_{10}波的电磁场和管壁电流

$$\vec{E}(\vec{x}) = E_x(\vec{x})\hat{e}_x + E_y(\vec{x})\hat{e}_y + E_z(\vec{x})\hat{e}_z$$

$$E_x(\vec{x}) = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}$$

$$E_y(\vec{x}) = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z}$$

$$E_z(\vec{x}) = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$m,n \in \{0,1,2\ldots\}$$

$$A_1 k_x + A_2 k_y - i k_z A_z = 0$$

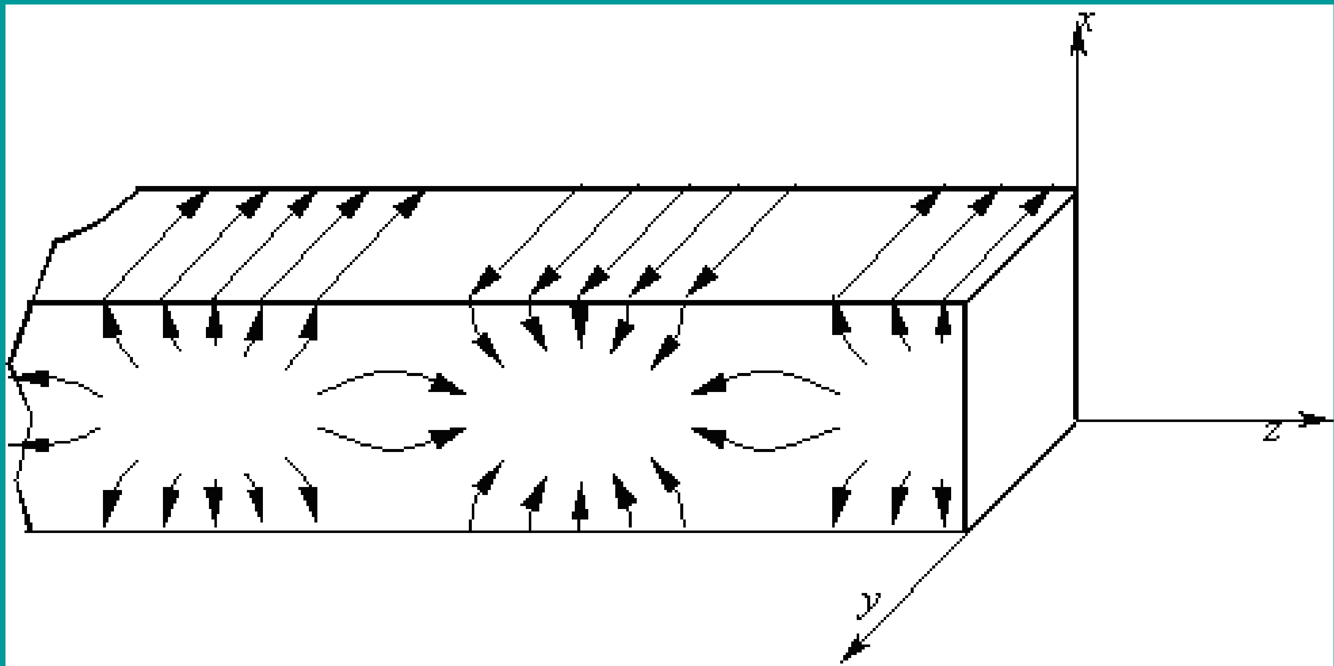
TE波 $\rightarrow$ $E_z = 0$ $\rightarrow$ $A_3 = 0$ $\rightarrow$ $A_1 k_x + A_2 k_y = 0$

10波 $\rightarrow$ $\left.\begin{matrix} m = 1 \\ n = 0 \end{matrix}\right\}$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{matrix} k_x = \pi/a \\ k_y = 0 \end{matrix}\right.$

$\rightarrow$ $A_1 = 0$

$$E_x = E_z = 0 \qquad E_y = A_2 \sin\frac{\pi}{a} x e^{ik_z z}$$

→ TE_{10}波的磁场解 → $\hat{n}\times\vec{H} = \vec{\alpha}$



在波导宽边中线上，横向电流为零。因此，开在波导宽边中部的纵向裂缝不会影响TE_{10}波的传播

对于TE_{10}波，波导窄边上无纵向电流但有横向的，故窄边上纵向裂缝对波的传播有扰动，并导致电磁波辐射，但横向裂缝不会。

第五章

电磁波的辐射

- 上一章，我们讨论了电磁波在空间传播的问题
- 本章，我们将要讨论电磁波的辐射问题
- 一般情况下，天线上的电流和它激发的电磁场是相互作用的，因此，原则上讲辐射问题属于边值问题
- 本章所研究的是给定电流分布情况下的电磁波的辐射问题，而且只讨论真空中的情况
- 这一章我们介绍两点内容：一个是关于“电磁场的矢势和标势”的问题，另一个就是关于“推迟势”的问题

§1　电磁场的矢势和标势

- 本章我们要研究的是源点附近电磁场的行为。此时，引入势的概念来描述电磁场是比较方便的。
- 对于有源问题，一般的作法是，首先求解势所满足的微分方程，而后，通过势来确定电场和磁场的分布

一．势

1．场的势函数描述

$$\left.\begin{array}{r}\nabla\bullet\vec{B}=0\\ \nabla\bullet(\nabla\times\vec{A})=0\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

对于静场

$$\left.\begin{array}{r}\nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\times(\nabla\varphi)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi$$

对于非恒定场

真空中

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{array}\right.$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E} \qquad \vec{B}=\mu_0\vec{H}$$

区别：时变场的矢势是随时间变化的

物理意义：矢势沿任一闭合回路的线积分等于穿过该回路的磁通量

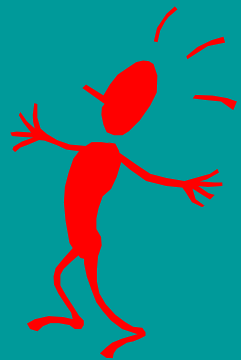
$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

无旋

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$



$$\boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi} \Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\nabla \varphi$$

$$\vec{B}=\nabla \times \vec{A}$$

❖ 对于时变场，由于电场是有源有旋场，因此，电场已不再是保守场，所以，场中不存在势能的概念，φ不再具有电势的意义。电压也失去确切意义

❖ 在时变场中，必须把矢势和标势作为一个整体来描述电磁场的

❖ 思考：时变场中矢势和标势与静场中矢势和标势的差别

2．规范变换和规范不变性

$$\vec{B}=\nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E}=-\nabla \varphi-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

令ψ为任意的时空函数

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\psi \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)$$

$$= \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla\psi$$

0

$$= \nabla\times\vec{A} = \vec{B}$$

$$\Rightarrow -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}+\nabla\psi)$$

$$= -\nabla\varphi + \nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$$

（**A’**，φ’）和（**A**，φ）描述的是同一个电磁场

结论：由于Ψ的任意性，表明描述同一时变电磁场的矢势和标势不是唯一的

规范：每一组描述电磁场的（$\vec{A}$，φ）称为一种规范

规范变换：

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

规范不变性：当势作规范变换时，物理量和物理规律保持不变，这种不变性称为规范不变性。

- 经典电动力学中，势的引入是作为描述电磁场的一种方法，而规范不变性是对这种描述所加的要求。
- 规范不变性是电磁场本身的一个属性
- 规范场：传递某种相互作用的场

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 规范条件：关于矢势散度的限制
- 注意：规范的选择是任意的
- 原则：就是为了讨论问题的方便

无散（源）场

1）库仑规范　规范条件：$\nabla \bullet \vec{A} = 0$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \bullet \vec{E} = -\nabla^2 \varphi & \text{无旋场（纵场）} \\ \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \text{无散场（横场）} \end{cases}$$

- 电磁场的纵场完全由标势描述，而横场完全由矢势描述

- 标势所满足的方程与静电场完全相同。因此它对应库仑场
- 除库仑场以外的场为感应场，由矢势描述

2）洛仑兹规范　　规范条件：$\nabla \bullet \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

二．达朗贝尔方程

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \bullet \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}}$$

$$\nabla\times\frac{\nabla\times\vec{A}}{\mu_0}=\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\vec{A}&=\mu_0\vec{j}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\\ \nabla\times\nabla\times\vec{A}&=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}\end{aligned}\right\}$$

$$\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left[\nabla\bullet\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=-\mu_0\vec{j}}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \bullet \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \Rightarrow \nabla \bullet (-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

一般规范

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left[\nabla\bullet\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=-\mu_0\vec{j} \\ \nabla^2\varphi-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\bullet\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t})=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

1. 库仑规范 $\nabla\bullet\vec{A}=0$

$$\nabla\bullet\vec{A}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{j}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

库仑规范的特点：标势满足的方程与静电场相同，其解是库仑势

一般规范

$$\begin{cases} \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla \bullet \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = -\mu_0 \vec{j}} \\ \boxed{\nabla^2 \varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \bullet \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}} \end{cases}$$

2．洛仑兹规范 $\nabla \bullet \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

达朗贝尔方程

$$\begin{cases} \nabla \bullet \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

洛仑兹规范特点：

- φ，**A**满足的方程形式相同
- 方程的物理意义明确

达朗贝尔方程

$$\begin{cases} \nabla\bullet\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \\ \nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j} \\ \nabla^2\varphi-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

- 矢势和标势满足的方程均是波动方程
- 电荷产生标势波动，电流产生矢势波动。离开电荷电流分布区域后，矢势和标势以及由它们产生的电磁场都将以波动形式在空间传播

注意：两种规范不同，所得的矢势和标势也不同，但由它们所得到的电场和磁场是完全相同的，即电磁场的波动性与规范的选择无关