电动力学

第二十五讲

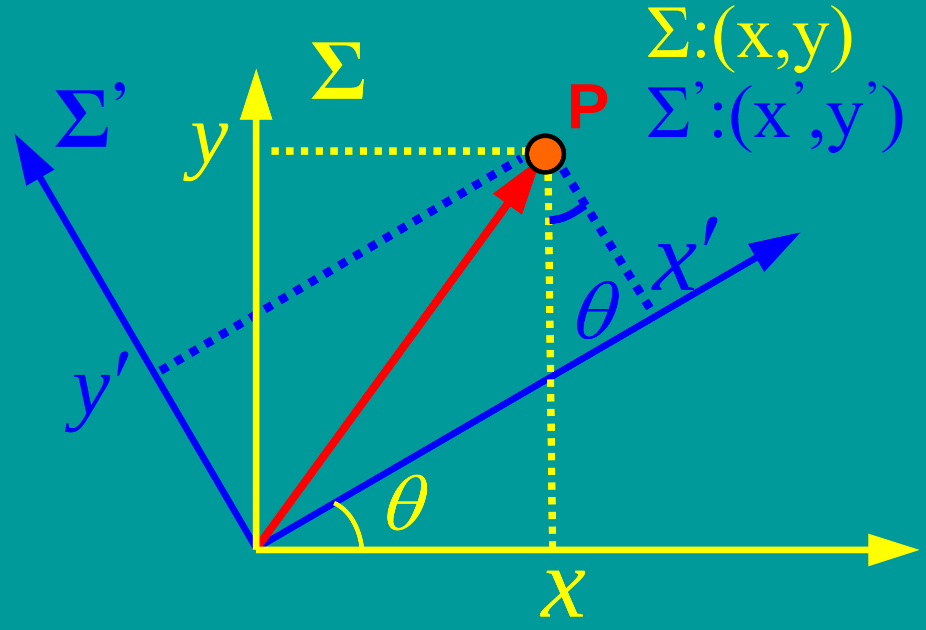
西安石油大学理学院
应用物理系

§4 相对论理论的四维形式

一. 正交变换

1. 二维正交变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



正交条件

OP²=x'²+y'²=x²+y²=不变量

正交变换：距离保持不变的二维平面上的线性变换

二维正交变换　　　　正交条件

一般形式

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$=$ 不变量

爱因斯坦符号

$x'_i = a_{ij}x_j$

$x'_i x'_i = x_i x_i =$ 不变量

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}a = I$$

2. 三维正交变换

——满足距离不变性的三维空间的线性变换

（x_1', x_2', x_3'）Σ'系—— P ——Σ系：（x_1, x_2, x_3）

三维正交变换　　　　正交条件

一般形式

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$= \text{不变量}$$

爱因斯坦符号

$$x_i' = a_{ij}x_j$$

$$x_i'x_i' = x_ix_i$$
$$= \text{不变量}$$

三维正交变换

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

正交条件

$$\tilde{a} a = I$$

爱因斯坦符号

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_i' = a_{ij} x_j$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{不变量} \Rightarrow \quad x_i^2 = x_i'^2$$

约定

1） 取消求和符号

2） 凡是具有重复下标的变量均进行求和运算

3） 求和可以任意改变次序

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \Rightarrow x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_i' = a_{ij}x_j}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

$$= x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^2 = \text{不变量} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{3} x_i'^2$$

$$\boxed{x_i'x_i' = x_ix_i = \text{不变量}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i' x_i' = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}(a_{ij}\cdot a_{ik})x_j x_k\right) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\delta_{jk} x_j x_k\right)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3}(a_{ij}\cdot a_{ik}) = \delta_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(x_j x_j\right)$$

$$\boxed{x_i' x_i' = x_i x_i}$$

3. 四维空间的转动

洛仑兹变换是满足间隔不变的线性变换

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

乘以－1

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$x_4 = ict$

$$\boxed{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

间隔不变

四维空间正交变换：满足间隔不变性的四维空间的线性变换

洛仑兹变换为正交变换

四维空间正交变换

一般形式

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

爱因斯坦符号

$$x_\mu' = a_{\mu r}x_r$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

正交条件

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$x_\mu' x_\mu' = x_\mu x_\mu$$

$$\tilde{a}a = I$$

注意：i, j, k, l等表示对1—3求和，而用希腊字母μ, ν, λ, τ等表示对1—4求和

4. 矢量的变换

二维矢量 $\vec{v}$

Σ 系: $(v_x, \ v_y)$

Σ’系: $(v_x', \ v_y')$

变换关系

$$\begin{cases} v_x' = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \\ v_y' = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \end{cases}$$

长度

$$|\vec{v}|^2 = v_x'^2 + v_y'^2 = v_y^2 + v_x^2$$

三维矢量变换可以得到类似的变换关系

结论： 任意矢量的变换具有与坐标转动变换相同的形式

二．物理量按空间变换性质分类

1．定义

- 标量：坐标系转动时，保持不变的物理量

  例如：质量，电荷，空间距离等

- 矢量：坐标系转动时，物理量的三个分量按与坐标相同的方式变换

  例如：速度，加速度，电场强度及微分算符等

- 二阶张量：坐标系转动时，物理量的9个分量按$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$方式变换

  例如：应力张量，电四极矩张量等

2．标量，矢量，张量的关系

物理量分类	变换关系	分量数	自由指标数
标量	$u'=u$	1	0
矢量	$v'_i=a_{ij}v_j$	3	1
二阶张量	$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$	9	2

标量：没有自由指标，又称为零阶张量;
矢量：一个自由指标，又称为一阶张量;
二阶张量：两个自由指标，又称为二阶张量。

例一：两矢量的内积

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_i w_i$$ 无自由指标为标量

$$v_i' \; w_i' = a_{ik} v_k a_{il} w_l = a_{ik} a_{il} v_k w_l$$

$$= \delta_{kl} v_k w_l = v_k w_k$$

满足标量变换规则

例二：张量与矢量点积

$$\overleftrightarrow{T} \bullet \vec{V} = T_{ij} V_j$$ 一个自由指标为矢量

$$T'_{ij} V'_j = a_{ik} a_{jl} T_{kl} a_{jn} V_n = a_{ik} a_{jl} a_{jn} T_{kl} V_n$$ 满足矢量变换规则

$$= a_{ik} \delta_{ln} T_{kl} V_n = a_{ik} T_{kl} V_l$$

3．四维协变量

洛仑兹协变量：一个物理量对洛仑兹变换有确定的变换关系

分类

1） 洛仑兹标量（不变量）：洛仑兹变换下不变的物理量

2） 四维矢量：具有四个分量的物理量V_μ。在惯性系变换下与坐标有相同的变换关系，即 $V'_\mu=a_{\mu\nu}V_\nu$

3） 四维张量：具有16个分量的物理量$T_{\mu\gamma}$。惯性系变换下满足$T'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}T_{\lambda\tau}$

物理量分类	变换关系	分量数	自由指标数
洛仑兹标量	$u' = u$	1 (4^0)	0
四维矢量	$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu$	4 (4^1)	1
四维张量	$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$	16 (4^2)	2

- 洛仑兹标量

例如：间隔dS^2, 固有时间$d\tau$，固有长度dl_0，静止质量等

固有时间隔$d\tau$为不变量的说明

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma\text{系} & S^2 = c^2 d\tau^2 \\ \Sigma'\text{系} & S'^2 = c^2 d\tau'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 d\tau'^2 \Rightarrow d\tau = d\tau'$$

- 四维矢量

四维位移dx_μ为四维矢量　　　$d\tau$为洛仑兹标量

定义四维速度矢量：$U_\mu = dx_\mu / d\tau$　　$U'_\mu = a_{\mu\nu} U_\nu$

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mu^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt} = \gamma_u u_i$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mu^3}{c}}}$$

$$U_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dx_4}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u (ic) = \gamma_u u_4$$

$$\boxed{U_\mu = \gamma_\mu (u_i, ic)}$$

- 四维波矢量　平面电磁波的电场强度 $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\bullet\vec{x}-\omega t)}$

k和 ω 在洛仑兹变换下均是可变量

$$\phi=\vec{k}\bullet\vec{x}-\omega t=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3-\omega t$$

$$=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+\left(i\frac{\omega}{c}\right)(ict)$$

四维波矢量

$x_\mu=(\vec{x},\ ict)$为四维位移矢量　　引入 $\boxed{k_\mu=\left(\vec{k},i\frac{\omega}{c}\right)}$

$\Phi=k_\mu x_\nu=k'_\mu x'_\nu=\Phi'$　洛仑兹标量

$$a_{\mu r}=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}$$

$k'_\mu=a_{\mu\nu}k_\nu$

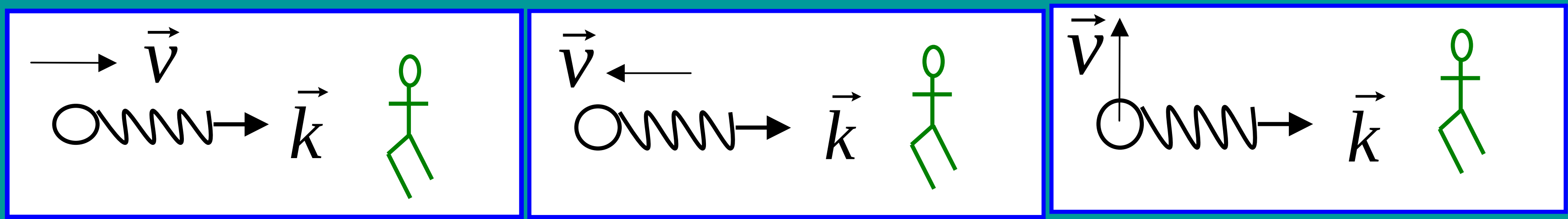
$$\Rightarrow\begin{cases}k_1'=\gamma(k_1+i\beta k_4)=\left(k_1-\dfrac{v}{c^2}\omega\right)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}\\ k_2'=k_2\\ k_3'=k_3\\ \omega'=\dfrac{\omega-k_1v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\end{cases}$$

4. 多普勒效应

1）经典的多普勒效应

光源的固有频率ω_0，运动频率ω

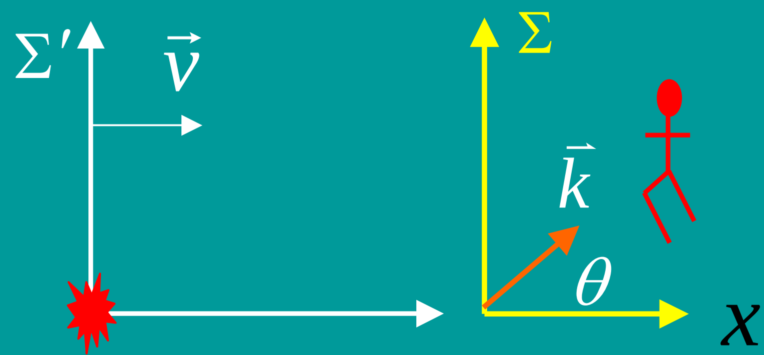
- 光源靠近观察者时：$\omega=\omega_0/(1-v/c)$　　$(\omega>\omega_0)$
- 光源远离观察者时：$\omega=\omega_0/(1+v/c)$　　$(\omega<\omega_0)$
- 光源垂直观察者运动时：$\omega=\omega_0$



2）相对论多普勒效应

设光源相对于Σ’静止

$$k_1=\frac{\omega}{c}\cos\theta$$



$$\omega' = \frac{\omega - k_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

Σ’系为静止参考系，则光源的固有频率ω’＝ω_0

Σ 系上观察到的光源角频率

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}}$$

光源靠近观察者 θ＝0

$$\omega = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v/c}\omega_0 = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\omega_0 \quad (\omega > \omega_0)$$

光源远离观察者 θ＝π

$$\omega = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c}\omega_0 = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\omega_0 \quad (\omega < \omega_0)$$

红移

光源垂直观察者运动 θ＝π/2

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-v^2/c^2} < \omega_0$$

横向多普勒效应

三．物理规律的协变性

协变性：在参考系变换下方程形式不变的性质

$$F'_{\mu}= a_{\mu\nu} F_{\nu}=G_{\nu} a_{\mu\nu} =G'_{\mu}$$

检验物理规律是否是协变的，最一般的方法是将描述物理规律的方程化为四维形式，相应物理量转化为四维协变量，如果能够实现这种转化，则描述物理规律的方程一定是协变的

作业：7，11