

· 论坛 ·

连续信号离散采样后频率公式

宋瑞*^① 杨辉^②

(^①大庆油田勘探分公司,黑龙江大庆 163453; ^②大庆油田研究院勘探一室,黑龙江大庆 163453)

宋瑞,杨辉. 连续信号离散采样后频率公式. 石油地球物理勘探, 2009, 44(3): 377~378

摘要 对于高于奈奎斯特频率连续信号离散后的具体频率,所有教科书和文献均未给出精确公式,其中有些文献虽然给出了计算方法,但不精确且无物理意义。为此,本文利用含有物理意义的几何模型法求出精确的计算公式,便于人们直观地理解采样与频率的关系。

关键词 采样间隔 奈奎斯特频率 假频 公式

1 采样后的频率公式及其物理意义

1.1 采样后的频率公式

原始频率 f 经采样后变为 f_c , 当实际频率大于奈奎斯特频率时,经采样后会产生假频。经采样后的频率表达式为

$$f_c = \left[2f_0 - \left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) \right]$$

$$\text{int} \left[\left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) / f_0 \right] + \left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) \times$$

$$\left\{ 1 - \text{int} \left[\left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) / f_0 \right] \right\}$$

$$f \neq n \cdot f_0, n \in J$$

式中: $f_0 = \frac{1}{2\Delta}$ 为奈奎斯特频率, Δ 为采样间隔;

$\text{int} \frac{f}{2f_0}$ 表示频率 f 包含 $2f_0$ 的倍数; $2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0}$

表示 $2f_0$ 整倍数的频率; $f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0}$ 表示去掉 $2f_0$ 整倍数的频率,频率取值范围为 $(0, 2f_0)$;

$\left[2f_0 - \left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) \right]$ 频率值取值范围为

$(0, 2f_0)$; $\left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) / f_0$ 其数值取值范围

为 $(0, 2)$; $\text{int} \left[\left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) / f_0 \right]$ 取 0 或 1;

$\left\{ 1 - \text{int} \left[\left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) / f_0 \right] \right\}$ 与上一个式子相

反,取 1 或 0。

1.2 物理意义

设计一个边前进边旋转的信号(以时间轴 t 为中心轴旋转),旋转尺度为频率值,这样便将频率和时间统一联系起来。量版模型为:一个时间间隔 Δ 旋转一周,因为 $2f_0 = \frac{1}{\Delta}$,所以两倍的奈奎斯特频率为圆周大小。对于被测信号把间隔 Δ 的两个点,投影到垂直时间轴的圆平面上,以此来测量频率大小,当半径相等时, $\frac{L_1(\text{弧长})}{L_2(\text{弧长})} = \frac{f_1}{f_2}$,由此可将频率大小用弧长来表示。

所有频率可认为是不断地旋转前进的,在能量和频率有限的情况下,某一采样切片的瞬时点共圆。任一频率在这个圆上都有反映,本文把圆周分成 4 等份,其分界点为 O 、 H 、 L 、 B ,图中 O 为原点, H 为半周点, L 右弧中点, B 左弧中点(图 1)。假设第一次采样落在原点 O ,第二次采样落在原点 E ,再定义

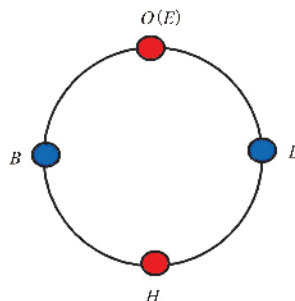


图 1 采样切片瞬时点位置示意图

* 黑龙江省大庆市让胡路区昆仑大街甲 27 号, 163453

本文于 2008 年 8 月 16 日收到,修改稿于同年 11 月 25 日收到。

被采后频率(f_c)的数值,落在圆周上的两个点,如果不是落在 H 点,两点分开的弧长不一致,则有

$$f_c = \frac{\text{落在圆上连续两点的小弧长}}{\widehat{OH}} \times f_0$$

按照采样定理,当 $f_c < f_0$ 时,连续信号可被离散信号描述,这也与上面提到的公式吻合。而当 $f_c > f_0$ 时,设标定模型的第一点和被采信号的第一点都为 O 点,当被采信号第二点 E 的位置落在 \widehat{OLH} 半周时(图2),则其所用公式为 $(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0})$;当 E 点位置落在 \widehat{OBH} 半周时(图3),则其所用的公式为

$$\left[2f_0 - \left(f - 2f_0 \cdot \text{int} \frac{f}{2f_0} \right) \right]$$

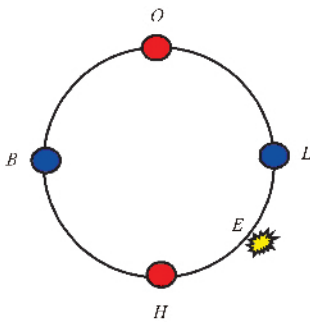


图2 当 E 点落在 \widehat{OLH} 半周时采样切片示意图

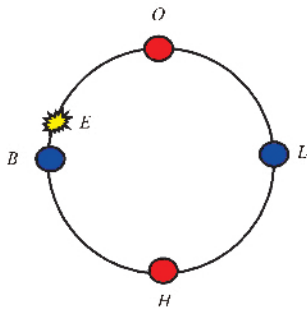


图3 当 E 点落在 \widehat{OBH} 半周时采样切片示意图

2 试例分析

2.1 试例 1

取100Hz的单频信号,采样选8ms,奈奎斯特频率为62.5Hz,此时的点落在 \widehat{OBH} 半周上,代入公式计算结果为25Hz,与实验结果吻合(图4)。

2.2 试例 2

取160Hz的单频信号,采样选8ms,此时的点落在 \widehat{OBH} 半周上,代入公式计算结果为35Hz,与实验结果吻合见图5。

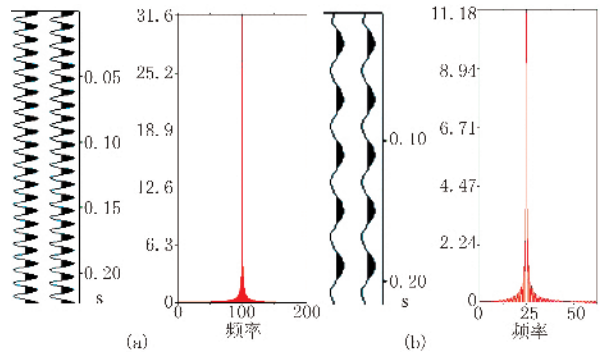


图4 单频为100Hz的波形和频谱(a)、8ms间隔重采后变为25Hz信号的波形和频谱(b)

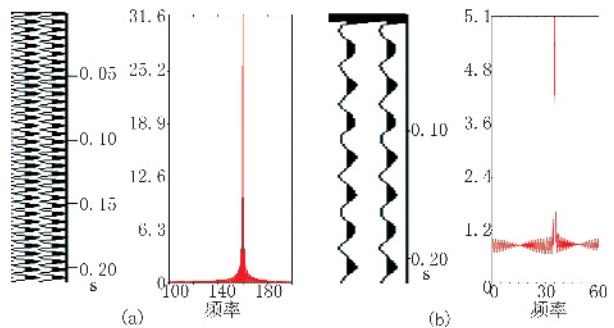


图5 单频为160Hz的波形和频谱(a)、8ms间隔重采后变为35Hz信号的波形和频谱(b)

3 结束语

本文利用含有物理意义的几何模型法,推导出了频率与采样的关系,可直观地理解采样和频率之间的关系,不论对于地震数据处理或其他信号处理均具有现实意义。

参考文献

- [1] 程乾生编著. 信号数字处理的数学原理. 北京:石油工业出版社,1979
- [2] 郑君里等编. 信号与系统. 北京:人民教育出版社,1981
- [3] 郑治真编. 波谱分析基础. 北京:地震出版社,1983
- [4] 渥·伊尔马滋著,刘怀山等译. 地震资料分析. 北京:石油工业出版社,2006
- [5] 李勇等. 数字滤波器设计中采样频率的作用和影响. 电气电子教学学报,2001,23(3)
- [6] 陈习意等. 傅里叶变换光谱技术中“折叠假线”研究. 化学物理学报,2000,13(2)
- [7] Sophocles J Orfanidis. Digital parametric equalizer design with prescribed Nyquist-frequency gain. JAES, 1997,45

(本文编辑:张亚中)