科学文化评论

《科学文化评论》第**3**卷 第**4**期（**2006**）：

学术评论

评三值逻辑SLO*

杜珊[1]

摘要 通过比较鞠实儿 [1997] 和鞠实儿等 [2001]，指出两文中的三值逻辑演算SLO只维持了名称的同一性，不具备实质的同一性；分析了两个SLO研究中的主要错误及其根源。

关键词 三值逻辑SLO 语义学 连接词 完全性

读了楚白 [2005] 后，笔者又认真阅读了鞠实儿先生研究三值命题演算 SLO的论文：鞠实儿 [1997] 和鞠实儿等 [2001 & 2003]（以下分别简记为《文2》、《文3》和《文4》[2]）。现在写出自己的一些看法。不当之处，请方家指正，也由衷盼望鞠实儿先生不吝赐教。

《文2》中建立的 SLO 与“后继论文”（《文3》）中进一步讨论的 SLO，只维持了名称的同一性，不具备实质的同一性，因为前者是后者的真子系统。为了消除歧义，我擅自决定改用 SLO(I) 和 SLO(II) 来称呼这两个非等价系统（详见表1）。事实上，甚至 SLO(I) 的语言也跟 SLO(II) 的语言不尽相同。但是，这两种语言的表达力偏偏相同。这样一来，在谈到这两个系统的（语言的）语义学时就不必加以区分，可以笼统地称作SLO-语义学。我想从这种貌似新奇的语义学谈起。暂且约定把变号$p_1, p_2, p_3, \cdots$写成更好分辨的$p, q, r, \cdots$。

表**1** **SLO(I)** 与 **SLO(II)** 的对照

	SLO(I)	SLO(II)
初始符号	括号；联结词 ~, ®, Ú, Ù, «； 常号 u；变号 $p_1, p_2, p_3, \cdots$	括号；联结词 ~, ®；常号 u (但在《文4》中删去)；变号 $p_1, p_2, p_3, \cdots$
公理模式	1. *A* ® (*B* ® *A*) 2. *A* ® *A* 3. *A* Ù *B* ® *A* 4. *A* Ù *B* ® *B* 5. *A* ® (*B* ® *A* Ù *B*) 6. (*A* ® *B*) ® ((*A* ® *C*) ® (*A* ® *B* Ù *C*)) 7. *A* ® *A* Ú *B*	1. *A* ® (*B* ® *A*) 2. (*A* ® *B*) ® ((*B* ® *C*) ® (*A* ® *C*)) 3. ((*A* ® *A*) ® *A*) ® *A* 4. (((*A* ® ~(*A* ® *A*)) ® (*B* ® ~(*B* ® *B*))) ® (*B* ® *A*) 5. ((*A* ® ((~*A* ® *A*) ® ~*A*)) ® *A*) ® *A*

	8. *B* ® *A* Ú *B* 9. (*A* ® *C*) ® ((*B* ® *C*) ® (*A* Ú *B* ® *C*)) 10. *A* ® (~*A* ® *B*) 11. (*A* ® *B*) ® (~*B* ® ~*A*) 12. ~~*A* « *u* 13. ~*A* ® *u*	6. ~~*A* ® ~~~*A* 7. ~~~*A* ® ~~*A*
推论规则	分离：*A*, *A* ® *B* / *B*	分离：*A*, *A* ® *B* / *B* 替换：*A* « *B* / *C* « *C*(*A*/*B*)

一 从亨德利定理看 SLO-语义学

SLO(I) 与 SLO(II) 的初始联结词集都包含乌卡谢维奇蕴涵号 ®，又都包含一个毫无认知价值的不像否定号的否定号 ~。在SLO-语义学中，® 和 ~ 的语义解释由下面左侧的三值矩阵（也叫真值表）给出：

®	t	u	f	~
t	t	u	f	f
u	t	t	u	u
f	t	t	t	u

	Ø
t	f
u	u
f	t

如所周知，右侧的三值矩阵给出乌卡谢维奇否定号 Ø 的语义解释。~ 和 Ø 的差异是极其明显的。然而，从联结词的表达力来看，它们的差异究竟在哪里呢？根据宏逵师的提示，我从多值逻辑学者亨德利写于1975年的文章 [Hendry 1980] 找到了想要的答案。

让我们把**t**和**f**叫做古典真值，把**u**叫做非古典真值。按亨德利的用语，一个三值函数*f* 叫做纯粹的，如果每当 *f* 的主目取古典真值时 *f* 也取古典真值。因此，例如说，乌卡谢维奇的蕴涵号 ® 与否定号 Ø 表达纯粹函数，而 ~ 表达一非纯粹函数。有趣的是，亨德利那时已经建立了一个很一般的结果：

亨德利定理 对任何非纯粹函数 *f*，集合 {®, Ø, *f*} 总是函数完全的，就是说，用这三个函数的复合能得出所有三值函数。

既然 ~ 表达一非纯粹函数，从亨德利定理立刻推出集合 {®, Ø, ~} 是函数完全的。可是，在 {®, Ø, ~} 中 Ø 当然不是独立的，因为它可以直截了当地定义如下：

Ø*A* $=_{df}$ *A* ® ~*t*，此处 *t* 是 *p* ® *p* 的缩写

足见，集合 {®, ~} 已经是一函数完全集了。与此成对照，早在上世纪30年代，斯乌佩茨基就知道纯粹函数集 {®, Ø} 不是函数完全的（见：Słupecki [1936]）。

如此看来，SLO-语义学的全部内容可归结为 ® 和 ~ 的真值表。假使想考察常见的其他联结词，不妨靠定义引入，例如

A Ú *B* $=_{df}$ (*A* ® *B*) ® *B*, *A* Ù *B* $=_{df}$ Ø(Ø*A* Ú Ø*B*), *A* « *B* $=_{df}$ (*A* ® *B*) Ù (*B* ® *A*)

连常号 *u* 也是可定义的：

u $=_{df}$ ~~*p*

不过，必须说明，联结词集 {®, ~} 根本不是最经济的。

二 SLO(I) 研究中的主要错误

大概鞠实儿先生一开始并不关心联结词的可定义性，宁愿采用较多的初始联结词。结果，在SLO(I) 的语言中总共有6个初始联结词（常号u可以看成零元联结词）。毫不奇怪，他要模仿 Hilbert-Bernays 的二值命题演算P_H的格式（参看 Church [1956]，页140-141）来设计 SLO(I) 的公理系统，给每个初始联结词规定一组公理模式。（大致如此，但明明遗漏了有关等值号引入和消去的公理模式，如像 $(A \text{ « } B) \circledR (A \circledR B)$ 等等。由于这类疏忽，SLO(I) 一开始就呈现不完全的朕兆。）

《文2》的内容非常少，除了给 SLO(I) 勾画了例行公事的一致性证明与健全性证明的轮廓，几乎没有讲别的。然而，文章末尾有一个大胆的预告：“在后继论文中，我们将证明 SLO 的完全性定理和演绎定理”。我们来证明，这个预告不可能实现。

1. SLO(I) 没有演绎定理

仿《文2》，用记号 $\vdash$ 表示演算 SLO(I) 中的可演绎性。按惯用语，SLO(I) 的演绎定理是指以下元定理：

$$\text{如果} A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n \vdash B, \text{那么 } A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash A_n \circledR B$$

让我们姑且假定演绎定理对 SLO(I) 成立。显而易见，根据分离规则，从 $p \circledR (p \circledR q)$ 和 p 可演绎出 q。因此，

$$p \circledR (p \circledR q), p \vdash q$$

应用两次演绎定理，由此得出

$$\vdash (p \circledR (p \circledR q)) \circledR (p \circledR q)$$

这意味着吸收律是 SLO(I) 的定理。SLO(I) 的健全性定理告诉我们，SLO(I) 的定理永远是一SLO-重言式，在任何真值指派下均取值**t**。可是，给p指派**u**，给q指派**f**，吸收律 $(p \circledR (p \circledR q)) \circledR (p \circledR q)$ 会取值**u**。下面的真值计算表明了这一点：

$$(\mathbf{u} \circledR (\mathbf{u} \circledR \mathbf{f})) \circledR (\mathbf{u} \circledR \mathbf{f}) = (\mathbf{u} \circledR \mathbf{u}) \circledR \mathbf{u} = \mathbf{t} \circledR \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

既然吸收律不是SLO-重言式，按 SLO(I) 的健全性定理，它不该是 SLO(I) 的定理。这个矛盾说明演绎定理对 SLO(I) 不成立。

一个反例与十个反例同样有力。然而，不妨顺便说说，鞠实儿先生从Hilbert-Bernays的演算P_H的公理集中删掉了蕴涵自分配律 $(p \circledR (q \circledR r)) \circledR ((p \circledR q) \circledR (p \circledR r))$，或许是已经察觉它不是SLO-重言式的缘故吧。可是，假使演绎定理成立，它同样会变成定理。

不难看出，只要 ® 是乌卡谢维奇的蕴涵号，只要一个三值逻辑有分离规则，演绎定理对它就不能成立。

2. SLO(I) 不具备语义完全性

SLO(I)的语义完全性定理是健全性定理的逆命题：SLO-重言式永远是 SLO(I) 的定理。为了表明这个命题是假的，最好是能够从 SLO(II) 的公理中去寻找不是 SLO(I) 的定理的SLO-重言式，因为这会直截了当地证实 SLO(I) 仅仅是 SLO(II) 的一个真子逻辑。有点出乎意料，这样的重言式很快就找到了。

例1 （三段论律） $(p \circledR q) \circledR ((q \circledR r) \circledR (p \circledR r))$

我们的任务是证明三段论律独立于 SLO(I) 的所有公理和分离规则。为此，我们引入一由0,1,2,3组成的四值系D_4，其中0为特指值，同时规定常号u指称0，其他联结词的解释由下列四值矩阵决定：

	$p \circledR q$				$p \text{ Ù } q$				$p \text{ Ú } q$				$p \text{ « } q$				$\sim p$
q																	
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	
p																	
0	0	1	2	3	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3
1	0	0	2	0	1	1	3	3	0	1	3	3	0	0	0	0	3
2	0	1	0	0	2	3	2	2	0	3	2	2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	3	3	3	3	0	3	3	3	0	0	0	0	1

（这些矩阵是我根据宏逵师早年笔记中 ® 的四值矩阵设计出来的。）在这样的四值解释下，SLO(I) 的每个公理都是D_4-重言式，分离规则也保存D_4-重言性，因而 SLO(I) 的每个定理都是D_4-重言式。可是，令p，q，r 分别取值1，3，2，三段论律取值2：

$$(1 \circledR 3) \circledR ((3 \circledR 2) \circledR (1 \circledR 2)) = 0 \circledR (0 \circledR 2) = 0 \circledR 2 = 2$$

足见三段论律不是 SLO(I) 的定理。

例2 （强逆换律） (Øp ® Øq) ® (q ® p)

（弱皮尔士律） ((p ® Øp) ® p) ® p

鉴于 SLO(I) 不含常号u的部分是直觉主义命题演算的真子系统，而例2中的两个公式分明不是直觉主义可证的，我们很自然地想到 Gödel [1932] 中的n值矩阵的某种轻微变形多半能显示这两个公式在 SLO(I) 中的不可证性。不出所料，取 $n = 3$ 就够了。具体地说，我们起用由0，1，2组成的三值系G_3，其中2为特指值。除了规定常号u指称2，我们用以下三值矩阵给出各联结词的解释：

	p ® q			p Ù q			p Ú q			p « q			~p	Øp
q p	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2		
0	2	2	2	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0
2	0	1	2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	0	0

（按：乌卡谢维奇否定号 Ø 的矩阵与 ~ 的矩阵相同，但它是按定义模式 ØA $=_{df}$ A ® ~t 从® 和 ~ 的矩阵得出的。）在这样的三值解释下，SLO(I) 的每个公理都是G_3-重言式，分离规则也保存G_3-重言性，因而 SLO(I) 的每个定理都是G_3-重言式。另一方面，当p取值1而q取值2时，强逆换律取值1：

(Ø1 ® Ø2) ® (2 ® 1) = (0 ® 0) ® (2 ® 1) = 2 ® 1 = 1

当p取值1时，弱皮尔士律取值1：

((1 ® Ø1) ® 1) ® 1 = ((1 ® 0) ® 1) ® 1 = (0 ® 1) ® 1 = 2 ® 1 = 1

所以，强逆换律和弱皮尔士律不是 SLO(I) 的定理。

3. 替换定理失效也是 SLO(I) 没有语义完全性的有力证据

设A在A_1中的若干出现被B替换后得到B_1。这时不费任何气力就能得出一语义定理

(1) 如果 A « B 是SLO-重言式，那么 A_1 « B_1 也是SLO-重言式。

鞠实儿先生在《文2》中把这个语义定理命名为“替换定理”。按惯例，“替换定理”其实应当是下面这个语法定理：

(2) 如果A « B 是 SLO(I) 的定理，那么A_1 « B_1 也是 SLO(I) 的定理。

很奇怪，《文2》从来没有提起这个真正的替换定理。

谁都明白，替换定理对 SLO(I) 成立的充分必要条件是所谓“合同规则”对一切联结词都成立，也就是说，(i) A « B / ~A « ~B；(ii) 对 * Î {®, Ù, Ú, «}，A « B / A * C « B * C并且 A « B / C * A « C * B。经过初步核查，差不多所有的合同规则都对 SLO(I) 失效。

举合同规则A « B / (C ® A) « (C ® B) 为例。由于~~p « u 是SLO(I) 的公理模式12的特例，如果该规则成立，(~~p ® ~~p) « (~~p ® u) 就应该是 SLO(I) 的定理。然而，这不是事实。让我们沿用SLO-语义学中 ®, Ù, Ú 和 ~ 的矩阵，仅仅把 « 的矩阵换成以下矩阵：

«	t	u	f
t	u	t	f
u	u	t	t
f	t	t	f

容易验证，(~~p ® ~~p) « (~~p ® u) 独立于 SLO(I) 的所有公理和推论规则。由此看出，上述合同规则不成立。

用同样的矩阵还能证明合同规则对 Ù 和 Ú 一概失效。就 Ù 而言，可以令 A = ~~p，B = u，C = ~(p ® p)。就 Ú 而言，可以令 A = ~~p，B = u，C = p ® p。

假使 SLO(I)真的是语义完全的，从 SLO(I) 的健全性定理和语义定理 (1) 就能自动得出替换定理。既然如此，既然替换定理失效了，SLO(I) 又怎么谈得上完全呢？

三 SLO(II) 研究中的主要错误

楚白 [2005] 已经指出《文3》中最严重的错误，那就是“作者将‘语法完全性’（亦即通常所说的Post-完全性）误用于只以公理模式和分离规则为初始的形式系统”L。我想先讨论一下这个错误的来由。

1. 从 SLO(I) 到 SLO(II) 的畸变过程中，为模拟$Ł^S_3$产生了误解

《文2》引用了 Rescher [1969]，想来鞠实儿先生写《文2》的时候一定知道该书第155页上所表述的乌卡谢维奇三值逻辑的一个最最著名的公理系统$Ł^S_3$（出自 Wajsberg [1931]，Słupecki [1936]）。他当时不理睬$Ł^S_3$。等到他试证 SLO(I) 的语义完全性失败之后，才想到走捷径，靠亦步亦趋地模仿$Ł^S_3$来另搞一个与 SLO(I) 大不相同的演算 SLO(II)，然后从$Ł^S_3$的波斯特完全性导出 SLO(II) 的语义完全性。改变主意是研究工作中常有的事，但应当说清楚。鞠实儿先生既不去证明 SLO(II) 与 SLO(I) 等价，又不声明等价性有待今后核查，径直给新演算加上老名称 SLO。这是不是要制造他仍旧在研究同一系统的假相呢？

不幸的是，还没有开始模拟$Ł^S_3$，已经把$Ł^S_3$本身弄错了。简单说，鞠实儿先生漫不经心地把表2中的$Ł^S_3$等同于L了。然而，它们真的是一回事吗？第一、$Ł^S_3$从公理出发，L从公理模式出发。每条公理只是一个特殊的公式，每个公理模式代表无穷多条公理，因为其中的语法变号 *A*, *B*, *C* 取任意公式为值。第二、$Ł^S_3$有代入规则，在L中改成了替换规则。既然《文3》给出L的时候要人参考 Rescher [1969]，我猜想，这是因为鞠实儿先生误认为该书中的rule of substitution（代入规则）是指rule of substitutivity of equivalence（等值式的置换规则，也经常简称“替换规则”）。这两者又是有本质区别的，因为代入规则只保存有效性而不保存真实性，替换规则像分离规则一样保存真实性。我们不久就会看到，以上违背逻辑常识的误解会引起灾难性的后果。

表2 $Ł^S_3$，L 与 SLO(II) 的对照

	$Ł^S_3$ 的正版	$Ł^S_3$ 的讹版 L	SLO(II)
初始联结词和常号	Ø, ®, T	Ø, ®, T	《文3》取 ~, ®, *u*；《文4》取 ~, ®
公理或公理模式	1. *p* ® (*q* ® *p*) 2. (*p* ® *q*) ® ((*q* ® *r*) ® (*p* ® *r*)) 3. (Ø*q* ® Ø*p*) ® (*p* ® *q*) 4. ((*p* ® Ø*p*) ® *p*) ® *p* 5. T*p* ® ØT*p* 6. ØT*p* ® T*p*	L1. *A* ® (*B* ® *A*) L2. (*A* ® *B*) ® ((*B* ® *C*) ® (*A* ® *C*)) L3. (Ø*B* ® Ø*A*) ® (*A* ® *B*) L4. ((*A* ® Ø*A*) ® *A*) ® *A* L5. T*A* ® ØT*A* L6. ØT*A* ® T*A*	1. L1 2. L2 3.增补的模式 4. L3的译本 5. L4的译本 6. L5的准译本 7. L6的准译本
推论规则	分离，代入	分离，替换	分离，替换

2. 在 SLO(II) 的基础中怎么会出现显然是多余的东西？“证不出就往里添”不是好办法

鞠实儿先生从 $Ł^S_3$ 的讹版 L 得出 SLO(II) 的策略简单之极，不外是按 T 和 Ø 的定义作翻译。我们在第一节说过，联结词集 {®, ~} 是函数完全的，没有什么三值函数不能用它们来定义。鞠实儿先生于是给出定义

$$TA = \sim\sim A$$

$$ØA = (\sim A ® A) ® \sim A \text{ 或 } ØA = A ® \sim (A ® A)$$

然后照这些定义写出L的六个公理模式的译本，只不过对最后那两个译本作了不大的简化。

不大的简化惹出不大的麻烦。鞠实儿先生需要证明L的所有公理模式的译本都是 SLO(II) 的定理模式，在他看来L5和L6的译本不太好对付。在这种情况下，他采取了两项补救措施。

第一、求助于替换规则。本来，表明从 SLO(II) 的公理模式和分离规则可以导出替换规则并不怎么难，有直接的证法，也有间接的证法。鞠实儿先生似乎对任何技术细节都避之唯恐不及，就干脆把非独立的替换规则列为初始规则之一了。

第二、为了对付L6的译本，只有替换规则好像不够。这时，鞠实儿先生又发现引入公理模式3能够一步跨过难关。实际上，这又是多余的。如果一个人肯仔细读读 Wajsberg [1931]，他会明白仅仅依靠 SLO(II) 的公理模式1，2及5就能得到定理模式 *A* ® ((*A* ® *B*) ® *B*) 和 *A* ® *A*（参见该文中的定理14和19）。所以，只要把前一模式中的 *A* 取为 *A* ® *A*、*B* 取为 *A*，便立即分离出公理模式3。Wajsberg [1931] 当然不好读，所有的公式都是用波兰学派的无括号记法写的。不过，逻辑学者命中注定是要读“天书”的。

3. $Ł^s_3$ 是波斯特完全的，但 L 不是，因此从 L 的波斯特完全性导出 SLO(II) 的语义完全性的证明计谋行不通

《文4》的骨架是这么一条推理链：已知$Ł^s_3$是波斯特完全的。L就是$Ł^s_3$，它当然也是波斯特完全的。可是，如果L是波斯特完全的，那么 SLO(II) 也是。如果 SLO(II) 是波斯特完全的，那么它一定是语义完全的。所以，SLO(II) 是语义完全的。

一切都好，只可惜L不就是$Ł^s_3$。

我们说，演算S是波斯特完全的当且仅当把S的任何非定理作为新公理添入后所得演算S*的定理集为全体公式集。在这里，给定演算S原有的初始推论规则仍是新演算S*的规则，应当适用于被添入的新公理。正因为如此，S原来有没有代入规则就成了决定S有没有波斯特完全性的重要因素之一。

演算 $Ł^s_3$ 的波斯特完全性是由斯乌佩茨基在 Słupecki [1936] 中首先宣布的，他当时未予证明。我们效法 Church [1956] 中介绍的通用方法，利用 $Ł^s_3$ 的语义完全性（见Wajsberg [1931] 第II节，Goldberg et al [1974]）来给一个证明。

$Ł^s_3$ 的波斯特完全性证明。假定 $A = A(p_1, ..., p_n)$ 不是 $Ł^s_3$ 的定理。由于 $Ł^s_3$ 的语义完全性，*A* 不是三值重言式，也就是说，存在一组真值 ｛$\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$｝Í {**t**, **u**, **f**}，当变号 $p_1, ..., p_n$ 分别被指派真值 $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$ 时，*A* 取值 **u** 或 **f**。对 $i = 1, ..., n$，定义一唯一的关联公式 A_i 如下：

$$A_i = \begin{cases} p ® p, & \text{如果 } \mathbf{t}_i = \mathbf{t} \\ \mathrm{T}(p ® p), & \text{如果 } \mathbf{t}_i = \mathbf{u} \\ Ø(p ® p), & \text{如果 } \mathbf{t}_i = \mathbf{f} \end{cases}$$

又令 A^s 是 *A* 的代入特例 $A(p_1/A_1,...,p_n/A_n)$。显而易见，*A* 在上述真值指派之下取值 **u**（**f**）当且仅当 A^s 取值 **u**（**f**）。现在把 *A* 作为新公理添入 $Ł^s_3$，形成一新演算$Ł^s_3$*。既然新演算仍然有代入规则，*A* 的代入特例 A^s 是它的定理。然而，容易看出，A^s ® T*p*，A^s ® ØT*p* 和 T*p* ® (ØT*p* ® *B*) 都是三值重言式，此处 *B* 为任意公式。根据 $Ł^s_3$ 的语义完全性，这三个公式均是 $Ł^s_3$ 的定理，因而也是 $Ł^s_3$* 的定理。既然 A^s 是 $Ł^s_3$* 的定理，我们依次分离出 T*p*, ØT*p* 和 *B*，足见任意 *B* 是 $Ł^s_3$* 的定理。 ■

这整个证明的症结在于代入规则要求新演算的新公理 *A* 的代入特例 A^s 也是它的新定理，否则得不出原演算的波斯特完全性。注意，我们并没有说凡有代入规则的系统都是波斯特完全的。这话不真。事实上，$Ł^s_3$的不含最后两条公理的那个真子系统，虽然有代入规则，却是波斯特不完全的。可参看Prior [1962] 第237页。

让我们转向演算L。前面说过，L是$Ł^s_3$的讹版，它从公理模式L1-L6出发，它的初始推论规则中没有代入而只有分离和替换。

L的波斯特不完全性的半语法证明。用记号 ├ 表示演算L中的可演绎性。L没有演绎定理，但有一较弱的斯图特勒演绎定理：

$$\text{如果 } A_1, ..., A_{n-1}, A_n \vdash B\text{，那么 } A_1, \cdots, A_{n-1} \vdash A_n ® (A_n ® B)$$

（详见 Goldberg *et al* [1974]。它的证明要用L的定理模式 (*A* ® (*A* ® (*B* ® *C*))) ® ((*A* ® (*A* ® *B*)) ® (*A* ® (*A* ® *C*)))，在 SLO(I) 中也是不可证的。）

为归谬，假定L是波斯特完全的。由于L是语义健全的，变号 *p* 不是L的定理。按归谬假设，*p* ├ Ø*p*。按斯图特勒演绎定理，├ *p* ® (*p* ® Ø*p*)。另一方面，吸收律的特例 (*p* ® (*p* ® Ø*p*)) ® (*p* ® Ø*p*) 是L的定理，于是得出 ├ *p* ® Ø*p*。这是荒谬的，因为 *p* ® Ø*p* 不是三值重言式。足见L不具有波斯特完全性。

丘奇提醒人们：把变号当公理添入一公理模式系统而不产生矛盾，从语义上说，与这种系统有一类比无模式的公理系统的健全解释更广的健全解释相关，因为，这种丧失了代入规则的系统已经没有规则能区分命题变号与常号了 [Church 1956, p.150]。

L的波斯特不完全性的纯语义证明。把变号 *p* 作为新公理添入L，形成一新演算L*。维持其他变号和联结词的正常解释，但规定变号 *p* 指称 **t**。在这样的解释下，L*的所有公理都是三值重言式，分离规则和替换规则也保存三值重言性，因而L*的定理集仍是一个三值重言式集，不同于全体公式集。例如，任何异于 *p* 的变号依然不是L*的定理。

4. SLO(II) 语义不完全，保留不保留初始常号*u*其结果都一样

除了把 SLO(II) 的语义完全性归结为L的波斯特完全性之外，《文3》和《文4》没有一处暗示过解决 SLO(II) 的语义完全性问题的其他任何途径。我们只好认定，鞠实儿先生拿不出这个问题的解。实际上，这是一个不成问题的问题。

说到这里，我们必须指出《文3》和《文4》中给予SLO(II) 的表述有一个“小小”的差别，前者把常号*u*列入初始符号表，后者把*u*删去了。然而，不管*u*是否作为初始符号出现，SLO(II) 都是不完全的。下面这个不完全性证明适用于这两种SLO(II)。给定如下二值解释，其中**t**为唯一的特指值：

	p ® *q*		~*p*	$Ø_1p$	$Ø_2p$	T*p*
p \ *q*	**t**	**f**				
T	**t**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**
F	**t**	**t**	**f**	**f**	**t**	**f**

（按：$Ø_1$和 $Ø_2$分别代表前文中提到的用两种不同方式定义的乌卡谢维奇否定号，就是说，$Ø_1$A $=_{df}$ (~A ® A) ® ~A，$Ø_2$A $=_{df}$ A ® ~(A ® A)。它们的矩阵是按照各自的定义模式从 ® 及 ~ 的矩阵得出来的；T的矩阵则是按定义模式TA $=_{df}$ ~~A从 ~ 的矩阵得出来的。）在这样的解释下，SLO(II) 的所有公理都是重言式，分离规则以及替换规则也能保存重言性。可是，SLO-重言式 $Ø_2p$ ® $Ø_1p$在这样的解释下不再是重言式了。当*p*取值f时，我们有

$$Ø_2\ f ® Ø_1\ f = t ® f = f$$

因此，$Ø_2p$ ® $Ø_1p$在SLO(II)中不可证。而Ł$^s_3$中的公理 ØT*p* ® T*p* 的第二种翻译$Ø_2$T*p* ® T*p* 在新的解释下也不是重言式：无论*p*取何值，我们都会有

$$Ø_2 f ® f = t ® f = f$$

这就表明了 $Ø_2$T*p* ® T*p* 在SLO(Ⅱ)中不可证。而它显然又是SLO-重言式。

在SLO(II) 含初始常号*u*的情况下，只要令*u*指称**t**，我们就很容易发现SLO-重言式*u* ® ~*u*在上述新的二值解释下也不再是重言式了。事实上，为了要证明SLO-重言式*u* ® ~*u*不是SLO(II)的定理，我们有一个更简便的办法：令*u*指称**t**，而维持其它联结词在SLO语义学中的解释不变。能这样做的原因很简单：SLO(II)的任何一条公理都不含*u*，从中不可能推出所有含*u*的SLO-重言式。

5. 为什么追求完全性？为什么喜欢 SLO？