《中国科技史料》2001年22卷第2期第99-108页

李俨与中国古代圆周率*

邹大海

（北京100010，中国科学院自然科学史研究所）

提要 本文以李俨、严敦杰的学术通信和已发表的论著相对照，讨论李俨对四个有争议问题在不同时期的看法和取舍态度。这四个问题是：1刘歆的圆周率，2《九章·圆田术注》中“晋武库”一段及圆周率 $\frac{3927}{1250}$ 的作者是谁，3如何阐释《隋书·律历志》中关于量器的记载，4祖冲之是如何得到圆周率 $\frac{355}{113}$ 的。李俨对这些问题的讨论，能反映他作为一代科学史宗师的研究思路、学术风格和嘉勉后学的长者风范。他关于史料和算理相结合的研究方法，对科学史研究中论点的“假定”性质的看法，对今天的数学史乃至科学史研究仍有意义。

关键词 李俨 严敦杰 圆周率 科学史学史

圆周率是数学史上一个令人关注的问题，在中国现代研究古代中国数学史的历史上尤其如此。李俨先生很早就对中国古代圆周率非常关注，“五四”运动以前茅以升先生撰写“中国圆周率略史”，就曾得到李先生的帮助[1]。由于材料残缺分散，年代湮远，关于这个课题虽然有大量论文发表，但见仁见智，至今还有一些问题存在争议。李俨、钱宝琮、严敦杰等先生都曾在不同的论著中先后发表过对圆周率问题的看法，成为中国圆周率史研究史上的重要文献。值得注意的是，李俨先生所发表的论著特别是晚年的论著中对有争议的问题，很少着墨，这是否由于他不感兴趣或没有认真考虑过这些问题呢？李俨、严敦杰等通信中对中国古代圆周率问题的意见，有助于我们解决这一问题，并进一步了解前辈学者的研究思路和取舍心态。

李俨与严敦杰是1940年开始通信的。李俨在此前的论著已多次谈到圆周率，严敦杰在1936年发表了《中国算学家祖冲之及其圆周率研究》，后来又作进一步的研究，撰成“祖率新释”一篇。1946年5月李俨收到严敦杰关于圆周率的新意见，6月又获读“祖率新释”，7月李俨针对严敦杰“拟为各史考证”，提到“如有意先作《隋书律历志考证》，该志关于圆率尚有数事就商”，并感谢严敦杰允许他把“祖率新释”的材料加入他拟写的论文“中算家目中之圆与球”。以后，他们的通信中就不时提到圆周率问题。可惜严先生的有关信件和论文“祖率新释”没有发表，手稿又未获见，本文只能根据李俨写的信和已发表的论著，讨论李俨关于圆周率的看法。

1 “歆率”问题

李俨在早年发表的《中国数学源流考略》中说：“炎汉初兴，张苍……厥后刘歆以圆率p= $\frac{3927}{1250}$ 号称歆率”[2]。这是当时未及深考，误信了以前岑建功《割圆密率捷法序》的说法，把《九章算术注》中关于

“王莽铜斛”与求p的近似值 $\frac{3927}{1250}$ 两段文字连读所致。3年多后钱宝琮先生发表文章辨明此事[3]，以后李俨先生就不再提此歆率 [①]，在《中国数学大纲》修订本中还说明岑说“属误记。此率疑出于祖冲之”[8]。李先生著作中多次提到的歆率为p=3.1547，此率并非历史文献所载，而是后人根据王莽铜嘉量所载的数据推算出来的。王莽铜嘉量为斛、斗、升、合、籥五种标准容量合一的标准器，正面有每种量器的铭文。此器从器的设计到铭文皆出于刘歆之手，其斛铭曰“律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九厘五毫，冥（幂）百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗。”[9]其“律嘉量斗”、“律嘉量升”、“律嘉量合”、“律嘉量籥”与此略同。斛的底面积为p（ $\sqrt{5^2+5^2}$ +0.095）^{2}=162，从而得到p=3.1547。

但是，刘歆此率不见于文献的记载，人们容易怀疑其真实性，以为可以凭经验造此嘉量。对此，李俨先生在1953年6月8日给严敦杰先生的信中说：

至（钦）[歆] [②] 率作p=3.1547，原系我们几个人的假定，原无根据，如为减省误会起见，暂时不作更张亦好。不过须有一庣旁记至“豪”为止，而升、合并以分为单位，故得值较小。如按此原则，再以p=3.1547入算，得值更小。不过，此项理想是否洽当，尚不敢定耳。

“假定”一词，道出科学史研究中一些推测性结论的实质，它必须经过材料的检验，检验符合才可立一说；不符合则假定被推翻，须另作假定。李俨的“原无根据”当指没有直接的史料依据，正因为如此，才称刘歆创有此圆周率为“假定”。另外，按此率计算，王莽嘉量的斗、升、合、籥的容积分别为162.002立方寸、16200.2立方分、1617.76立方分、808.88立方分。由于这些用假定的歆率3.1547算出的容量数据与量器本身的规定有出入；而反过来，由斗、升、合、籥的规定量值反求相应的圆周率时，后两个得到的值为3.15907140127，比3.1547稍大，所以李俨对p=3.1547的歆率就有些怀疑了。但从他后来的著作中都用到这个歆率看，他认为刘歆还是创有这个圆周率的。其中的原因，我想除了这是用王莽嘉量的数据推出的外，就是《隋书·律历志》中说“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法……”[10]。据此，则刘歆是史籍所载第一个探求改进古率“周三径一”的人，其后张衡、刘徽、王蕃、皮延宗、祖冲之诸人虽结果和方法各异，但志愿都相同。加之嘉量中最小的籥“方寸而圜其外，庣旁九毫，冥（幂）百六十二分，深五分，积八百一十分”，数据非常小，而由斛、斗、升三个得出的圆周率都是3.1547,所以李俨认为刘歆应该是用圆周率计算而不是凭经验得出这王莽嘉量的数据的。不过，在《中国数学大纲》中，他说“刘歆开始以所求圆周率（π）配合当时的量器‘嘉量’。假定它的圆率π=3.1547,所以‘嘉量’可得到1620立方寸的容量”（[8]，36页）。这里仍用了“假定”二字，说明他态度的审慎。

2 关于《九章注》中“晋武库”一段和 $\frac{3927}{1250}$ 的作者

今本《九章算术注》中“晋武库”以下一段，论及π的近似值 $\frac{3927}{1250}$ 。关于这段文字的作者为刘徽还是祖冲之，文字如何解释，素有不同意见，特别是20世纪50年代曾有热烈的争议。钱宝琮、励乃骥、郭书春、李继闵等力主该率为刘徽所创，而余宁生、余介石、李迪、孙炽甫等力主为祖冲之所创。

李俨没有介入辩论，但也曾表达过自己的看法。在1931年版的《中国数学大纲》中，他把这段文字作为祖冲之注，以此率为祖冲之所创；而在1937版《中国算学史》中，他把此率是作为祖暅的工作叙述的[7]。何以有此变化，尚难知晓。严敦杰早年也是主张此段为祖冲之所写文字的。

在1937年版《中国算学史》中，李俨把《隋书·律历志》关于祖冲之密率的记载与《九章注》中此段文字及其上下文连起来考虑，认为祖暅按刘徽的割圆术推算，得出正2^{m+1}、2^m边形的面积之差近似地为公比等于1/4的等比数列。这样，当半径取1，以正n边形代替圆时,李俨认为得到相应的圆周率为：

$$p_n=p_{96}+\frac{105}{625}\left(4^{-1}+4^{-2}+4^{-3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=3.14\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right\}$$

$$=3.14\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\times\frac{1}{3}$$

$$=3.14\frac{99}{625}$$

$$\approx 3.14\frac{100}{625}=\frac{3927}{1250}=3.1416$$

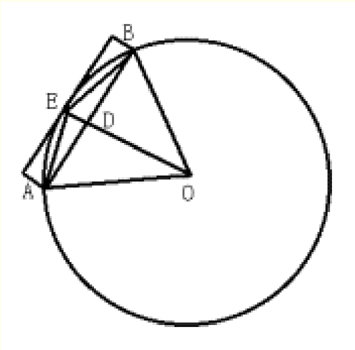
上述步骤中以$3.14\frac{99}{625}\approx 3.14\frac{100}{625}$,和以正$2^{m+1}$、$2^m$边形的面积之差近似为公比1/4的等比数列,这两处都有凑数之嫌。所以，李俨对此并不满意。

1946年李俨收到严敦杰5月26日来信，见到严敦杰的新解释后，非常高兴，认为可以解决祖氏圆周率3.1416的问题：

顷收到五月廿日大示及兄对《隋书》论圆率“以十二觚之幂为率，消息当取分寸之三十六”一段新释，甚喜。此段解释取数整齐，所得至为自然，前在《中国算学史》p.29、p.30所得结论，深为不满。今得来示所释，则$p_{192}=3.14\frac{64}{625}+\frac{36}{625}=3.14\frac{100}{625}$有一着落矣。

原书“分寸之三十六”一语，无疑为$\frac{36}{625}$，但其演算步骤是否如兄所举方式，则尚未能确定。今在旅中，手中未有《隋志》，容日内回长安检出此项材料，并细读原文，再行请益。

严敦杰的新解释不见，可能是他给李俨寄的论文“祖率新释”的一部分。此文不见发表，但新近出版的《祖冲之科学著作校释》有严敦杰对《九章》圆田术注的解释，可以参考。如图,*AB*是圆内接正6边形的一边，*E*为弧*AB*之中点。取圆半径为1,设*S*为三角形*ABE*的面积，*P*为弓形*ABE*与三角形*ABE*面积之差。严敦杰推出$\frac{P}{S}=\left(\frac{\pi}{3}-1\right)/\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，再把刘徽的圆周率3.1410代入,算 得$\frac{P}{S}=\frac{47}{134}$,再用刘徽已经算得的正



192边形面积$\pi_{192}=3.14\frac{64}{625}$和正96边形的面积$\pi_{96}=3.13\frac{584}{625}$相减,得其差为$\frac{105}{625}$。由134:47=105:$a$,得$a=36^{+}$。严敦杰认为这就是注文中“以十二觚之幂为率，消息当取此分寸之三十六”。进而得到圆面积的近似值为$3.14\frac{64}{625}+0.00\frac{36}{625}=3.14\frac{100}{625}=3.14\frac{4}{25}$。再以圆半径为10,考虑其外切正方形与内接正方形,三者的面积比为$4r^2:\pi r^2:2r^2=5000:3927:2500$, $\pi=3927:1250$。

严敦杰有“以十二觚之幂为率，消息当取此分寸之三十六”为文献依据,又不需要像李俨当初把$3.14\frac{99}{625}$近似化为$3.14\frac{100}{625}$，所以李俨表示佩服。不过，他假定刘徽知道针对正96和正192边形的P和S也存在相应的关系，这并没有切实的根据，所以李俨虽然承认“原书‘分寸之三十六’一语，无疑为$\frac{36}{625}$”，但仍坚持“其演算步骤是否如兄所举方式，则尚未能确定”。不过，李俨似乎后来也没有想出更好的办法，在其《中国数学大纲》（[8]，77-78 页）中，基本上采用严敦杰先生的方法 [③]。

50年代，有位叫孙炽甫的年轻人与李俨通信，求教研习中算史，李俨也托他代查崔朝庆史料，《中算史论丛》第二集所收修订的“近代中算著述记”在录崔朝庆撰《数学智珠》下，即称“光绪三十四年(1908年)自刊本(孙炽甫藏)”[11]。孙炽甫在李俨指导下研习古代圆周率史后，写了一篇文章“中国古代数学家关于圆周率研究的成就”，请李俨审阅并请推荐给《数学通报》（李俨为该刊特约编辑）发表，并提到可能会因与钱宝琮先生的观点不同而有碍发表。李俨把信和论文寄给严敦杰，双方交换了意见。1954年12月8日李俨给严敦杰信中说：

“对孙炽甫文稿所提意见甚是。以后研究和编订中国数学史，确如来函所说，需要慎重。不过我们又须考虑如何可以引起青年有兴趣的加入研究，不叫他们失望。”

提高后学的研究兴趣与慎重发表论文，往往是一对矛盾。李俨在此问题上的考虑体现了一代学术带头人的胸怀和长者风范。孙氏此文于次年发表在《数学通报》上。文章应该按李、严二先生的意见修改过，发表时正文前还加有编者按：

“此篇所论，除前三段及第四段前半大段与钱宝琮先生“中国古代算书中之圆周率研究”（载在“科学”第八卷第二期，1923）类似外，第四段后半段对于密率所提的意见，纵非“定论”，足资参考。第五段所谈，虽与钱宝琮先生的见解（见前篇）不同，也一并列出，希望大家研讨。”[12]

这段“编者按”是否出自李俨之手，尚不敢肯定，但至少是参考过李俨意见的。孙氏此文和钱宝琮先生力主圆率$\frac{3927}{1250}$为刘徽所创的论文[13]一同发表，后来又一同收入《初等数学史》[14]。

50年代关于这个问题的讨论似乎谁也没能说服谁，但双方都有一些论据比较有力。李俨对双方论文的论点和论据都是了解的，他虽然仍倾向于该段文字为祖冲之注，该率为祖冲之创，但并没有像其他人一样写大段的驳议文字。在《中国数学大纲》修订本中，他说“术文内注文自‘晋武库’以下，现暂定是祖冲之注”，然后通过计算作了一番具体的解释；并称3927/1250“疑出于祖冲之”（[8]，69，33 页）。这大概就是典型的李俨风格吧。

3 对《隋书》中关于量器的记载的看法

1953年6月8日李俨给严敦杰的信说：

关于古代圆率问题，近尚有些新体会。如：

《隋书》卷十六称：《周礼》　氏鬴量“祖冲之以算术考之”，刘歆斛铭“祖冲之以圆率考之”。

（1）《周礼》“斛”称为“鬴”，法先设一正方形，每边一尺，外接一圆，如玉衡之制，径八寸周二尺五寸而强（蔡邕语），深一尺，则积$10\times\frac{25}{8}(\sqrt{5^2+5^2})^2$=1562.5立方寸。如用p=3.14159265，则旧率（p=$\frac{25}{8}$=3.125）失之太小，故方形减傍一厘八毫（七秒，原无此二字），即：10×3.14159265[

$(\sqrt{5^2+5^2}-0.187)=\frac{14.10472}{2}]^2$ =1562.49565

=1562.5立方寸。[④]

（2）王（莽）[莽]律嘉量斛，因旧率失之太大，故方形庣旁留一分九毫有奇，即10×3.14159265[

$(\sqrt{5^2+5^2}+0.109)=\frac{14.36193}{2}]^2$ =1620.00178=1620立方寸。[⑤]

李俨此段文字，主要针对《隋书·律历志》的二段文字：

1.宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。（[10]，388页）

2.《周礼》，　氏“为量，鬴深尺，内方尺而圆其外，其实一鬴；其臀一寸，其实一豆；其耳三寸，其实一升。重一钧。其声中黄钟。……祖冲之以算术考之，积凡一千五百六十二寸半。方尺而圆其外，减傍一厘八毫，共径一尺四寸一分四毫七秒二忽有奇而深尺，即古斛之制也。……《汉志》曰：“量者，……而五量嘉矣。其法用铜方尺而圆其外，旁有庣焉。其上为斛，其下为斗，左耳为升，右耳为合、龠。其状似爵，以縻爵禄。上三下二，参天两地。圆而函方，左一右二，阴阳之象也。圆象规，其重二钧，备气物之数，各万有一千五百二十也。声中黄钟，始于黄钟而反覆焉。”其斛铭曰：“律嘉量斛，方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，冥百六十二寸，深尺，积一千六百二十寸，容十斗。”祖冲之以圆率考之，此斛当径一尺四寸三分六厘一毫九秒二忽，庣旁一分九毫有奇。刘歆庣旁少一厘四毫有奇，歆数术不精之所致也。（[10]，408-409页）

此处《周礼》　氏，实为《考工记》内容。　氏的鬴，祖冲之以算术考之，得积1562.5立方寸,反推之则圆周率为25/8。李俨找到蔡邕有率25/8，这就使得“祖冲之以算术考之”有了历史依据。按：蔡邕此率见于《史记》张守节正义所引：“蔡邕云：玉衡长八尺，……玑径八尺，圆周二丈五尺而强”[15]，据此则蔡邕的圆周率为3.125^+。这条文献在李俨的《中国数学史料》有提及。不过，以蔡邕率解释　氏的鬴值，在以后正式发表的论著中李俨似并未论及。是由于疏忽缺写，还是出于证据不足，尚有待进一步的研究。笔者倾向于认为李俨是考虑到证据不足的缘故。

祖冲之的密率比蔡邕率大，如仍按照边长一尺的正方形之外接圆计算，则鬴的容量超过1562.5立方寸,所以该圆应该比这个正方形的外接圆稍小一点,这就有一个“减旁”的数值。按《隋书》所载，祖氏的“减旁”为“一厘八毫”即0.018寸,李俨取圆半径与方的对角线之半的差，算得减旁为0.0187寸, 故在“减傍一厘八毫”后补二字“七秒”。然后他取祖冲之“密法”的上、下限的平均值为密率,验算了鬴的容积。

对王莽嘉量，如按祖冲之的密率，采用刘歆的庣旁数值，因祖率比歆率小，此时算出的容量低于规定的1620立方寸，所以祖冲之认为庣旁应该有0.109^{+}寸, 比刘歆的庣旁大“一厘四毫有奇”。李俨验算了祖冲之的数据正好和1620立方寸的规定值相吻合。这就解释了《隋书》对祖氏校算王莽嘉量的记载。在《中国算学史》修订本[16]和《中国数学大纲》修订本（[8]，37页）中，李俨用祖冲之算出的直径验算了斛的容积和减旁，这都可以从这封信中找到根据。

对祖冲之校算量器的解释，李俨仍如《中国算学史》（1937年版）采用圆周率值3.14159265入算[7]，它显然是祖冲之的盈数3.1415927与朒数3.1415926之平均值。这在史料上并没有记载，容易引起怀疑。1953年7月8日李俨致严敦杰的信中说：

《数学通报》1953年1、2月号有人以为祖冲之圆率不应作p=3.14159265。其实《隋书》“《周礼》　氏鬴量，‘祖冲之以算术考之’，刘歆斛铭‘祖冲之以圆率考之’，都以圆率正数p=3.14159265入算”则由来已久。兄以为然否？

李俨此处是针对程廷熙的随录“3.14159265”一小文所发的意见。程氏以为李俨等人以祖冲之有圆周率3.14159265，若仅据“《畴人传》所载‘冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间’”，则“似不能断定其为3.14159265”[17]。程氏似未注意到《畴人传》的话本于《隋书·律历志》。从史料记载来看，李俨确实没有更多的依据，但他并不局限于史料明确表述的内容，按他的核算，祖冲之是按3.14159265来校准《周礼》　氏鬴量和王莽铜斛的，不能因为史料没有明确记载就说祖冲之没有用过这圆周率。而从祖氏关于圆周率的上下两限来看，他取其平均值校算也是很自然的。这是李俨跳出史料本身，而以算理释史的一例。

不过，平心而论，李俨的思路是对的，但他在具体计算上有误差，所以我们下面的分析虽然不能完全否定祖冲之用过3.14159265，但也确实没有证据表明他用过这一值。

就《周礼》　氏的鬴而言，我们用祖氏强率算出的容积为：

$$10\times3.1415927\left(\frac{14.10472}{2}\right)^2=1562.495683078,$$

这是一个不足近似值。可见用强率比用包括平均值在内的强、弱率之间的任意值算出的结果，更接近理想的数值1562.5。

就王莽铜斛而言，我们用祖氏的强率算出的容积为：

$$10\times3.1415927\left(\frac{14.36192}{2}\right)^2= 1619.999551431,$$

这也是比用平均值算出的结果更接近理想数值1620的不足近似值。

以上说明对于校算　氏的鬴和王莽铜斛，用强率和弱率之间的任何值都不如强率更能使结果接近理想值，所以祖冲之不大可能是用平均值进行校算的。

不过，李俨在校算王莽铜斛时，用的圆径为14.36193寸，比《隋书》所载多一忽，不知何故。但是，若依此值，则以弱率入算时，铜斛的值为：

$$10\times3.1415926\left(\frac{14.36193}{2}\right)^2=1620.001755831$$

此为比以平均值入算的结果更接近理想值的过剩近似值。这意味着强率和弱率之间的任何值都不如弱率能使结果更接近理想值。所以这仍说明祖冲之不大可能是用平均值进行校算的。

4 祖冲之密率 $\frac{355}{113}$ 的得来

上引《隋书》的第一段，是我们今天得以知道祖冲之算得圆周率在3.1415926与3.1415927之间，以及采用密率$\pi\approx\frac{355}{113}$，约率$\pi\approx\frac{22}{7}$的原始依据。祖冲之的圆周率精确到小数点后第7位，在世界史上保持领先记录九百多年，成为中华民族的骄傲，现代学者对此津津乐道。由于祖氏的方法和数学著作失传，其圆周率的得来方法和过程就成为现代学者关注的问题。特别是密率$\frac{355}{113}$，是分母很小的最佳分数近似值（梁宗巨推算分母小于16604的分数没有一个比密率$\frac{355}{113}$更好[18]），因而推测密率的得来尤其令人关切。

李俨在《大衍求一术之过去与未来》中参考《括要算法》和李锐的《日法朔余强弱考》，得出几种推测。

以圆直径为1。李俨的第一种方案为：以圆周率的强率4/1和弱率3/1出发，先算出$\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}$＞周，仍为强率。乃以此率与弱率3/1的分子分母分别相加得$\frac{10}{3}$，仍为强率。如此根据新算出的值为强率或弱率，再决定分别取初始的弱率（3/1）或强率（4/1）以相调节，直到算出$\frac{355}{113}$。第二种方案也是从这两个强率（4/1）和弱率（3/1）入手，但以后每次的计算都以最新得到的弱率或强率入算，这样就可以较快地得到$\frac{355}{113}$。第3种方案是以$\frac{22}{7}$为强率，$\frac{157}{50}$为弱率，“就中强数是9，弱数是1。即$\pi=\frac{355}{113}=\frac{22\times9+157\times1}{7\times9+50\times1}$”。[19]此种方案早先钱宝琮已提过[3]。

从简洁性上讲，第三种最佳，而且祖冲之时代已知有此二率，以此二率调节算出$\frac{355}{113}$是很自然的。李俨还要提出以强率4和弱率3来调节的方案，是否多此一举？

《括要算法》为日本関孝和(约1642～1708)所著，李俨后来曾引三上義夫的论文称“相传日本関孝和于奈良得一算书，学乃大进，其遗著《括要算法》多采中法，据冈本则录且称当时梶山、主和次俊尚藏有

祖冲之之《缀术》，今书亦散亡，真伪不可得知”[20]。那么，李俨是不是考虑到《括要算法》与祖冲之《缀术》可能存在的关系才提出上述第一、二种方案呢？李俨和三上義夫在新文化运动以前即有通信，1917年三上義夫曾向李俨赠送过足本的《杨辉算法》[21]，李俨在与他的交往中了解到有关関孝和与《缀术》关系的传说也是可能的。

严敦杰在《中国算学家祖冲之及其圆周率之研究》中引述前人用连分数和调日法推测祖冲之获得密率的方法后，又提出两种方法。其一种是：祖氏以 $\frac{22}{7}$ 大于实际值 $\frac{x}{y}$ （x、y为整数），那么$7x<22y$，假定$7x+1=22y$，

那么$22y-7x=1$　　　（1）

同样，祖冲之知道 $\frac{3927}{1250}$ 大于实际值 $\frac{x}{y}$ ，仿上法有

$3927y-1250x=1$　　　（2）

解（1）、（2）式，得到$x=355$，$y=113$，“即 $\frac{x}{y}=\frac{3927-22}{1250-7}=\frac{355}{113}$ ”[22] [⑥] 。

1946年严敦杰寄给李俨“祖率新释”，大概还用到与上面的推测相类似的解释，所以6月24日李俨给他的信中说：

据《隋书》所记，刘、张、刘、王、皮之外尚有钱乐之诸人论及圆率并举有数（字）例，惜史书刊本内对数字多有刊误之处，尚须详校耳。至祖率内“密率”是否$p=\frac{3927-22}{1250-7}=\frac{355}{113}$，由此而得，尚未敢论定。好在大著取名“新释”尚无问题。

上引严文最末的等式，实际由（2）－（1）式得到。但这两式都以右边为1，是假设新的分数值 $\frac{x}{y}$ 与已给的 $\frac{22}{7}$ 或 $\frac{3927}{1250}$ 最能接近，但这一假定的依据又不知何在。所以李俨对严先生的推测持保留态度。

一年半以后，李俨对祖冲之密率又进行了琢磨。在1948年1月26日给严敦杰的信中，他说：

兹再读大著“祖率新释”，以为祖氏所求密率 $\frac{355}{113}$ ，事非偶然，似与调日法有关。今就所见写述如另纸，拟作为大著“祖率新释”之附注，未知合用否？阅毕见掷为荷。

前面说到，李俨曾有三种用调日法得出密率的方案。此次又提到“事非偶然，似与调日法有关”，看来是用调日法做的推测。既然作为严文的附注，这个推测大概是异于严敦杰的推测而又有相似的地方。可惜他写的“另纸”在这次整理的信件中没有见到（大概严敦杰退给李俨了，因他希望“阅毕见掷”），加之严敦杰的“祖率新释”又没有发表，所以即使李俨的推测附于严文，现在也见不到。

上面提到的孙炽甫文，认为祖冲之通晓《孙子算经》“物不知数”不定方程解法，同意钱宝琮关于约率 $\frac{22}{7}$ 为祖冲之修正徽率 $\frac{157}{50}$ 时假定$7x+1=22y$而得的看法[23]；他并认为祖冲之在修正刘徽的计算得到 $\frac{3927}{1250}$ 后，

“因知其微多，于是设x，y俱为整数而 $\frac{x}{y}$ 为略小于 $\frac{3927}{1250}$ 之分数，则从 $\frac{3927}{1250} > \frac{x}{y}$ 得$3927y > 1250x$，更令$3927y=1250x+1$，按不定方程解法得 $\frac{355}{113}$ 为 $\frac{x}{y}$ 之第一答，以笔者窥之，冲之约密二率可能即得自上述之不定方程，但未敢据为定论。”[12]

孙文的这段见解正是上面提到的“编者按”中所说的“足资参考”的“第四段后半段”。这一见解与上面所说严敦杰1936年提出的方法虽然有些不同，但思路颇有一致性，而与钱宝琮先生20年代用“求一术”推测得出约率的方法则一脉相承。孙文未引到严敦杰该文，或者是没有见过。但李俨、严敦杰对所有这些意见应该都是清楚的。李俨对严敦杰关于密率得来的意见持保留态度，孙氏关于密率得来的见解既与钱、严等的见解类似，又没有更具说服力的证据，所以，李俨自然不会以此为定论。至于由调日法推测密率的得来，李俨虽曾有所偏爱，但亦没有足够的证据。所以，在50年代中期以后发表的论著中，李俨虽多次提到祖冲之所发明的这个备受今人溺爱的密率，但竟没有一处有关于密率如何得来的推测！

致谢：本文所涉及的学术通信，概由严敦杰先生的哲嗣严家伦先生提供；文章的发表还得到李俨先生的哲嗣李炳权先生的支持。在此谨致谢忱。

参考文献

[1] 茅以升．中国圆周率略史．科学，1917，3（4）：411-423

[2] 李俨．中国数学源流考略．北京大学月刊，1919，1（4）：1-19

[3] 钱宝琮．中国算书中之周率研究．科学，1923，8（2）：114-129，1923，8（3）254-265

[4] 李俨．中算之起原及其发达．东方杂志，1937，34（7）：81-91

[5] 李俨．中国算学小史．《万有文库》本．上海：商务印书馆，1930

[6] 李俨．中国数学大纲（上）．上海：商务印书馆，1931．17

[7] 李俨．中国算学史．上海：商务印书馆，1937．28-31

[8] 李俨．中国数学大纲（修订本）．见：李俨钱宝琮科学史全集．第3卷．沈阳：辽宁教育出版社，1998．38

[9] 丘光明．中国历代度量衡考．北京：科学出版社，1992．216

[10] 魏征等．隋书．北京：中华书局，1994．387-388

[11] 李俨．中算史论丛．第二集．见：李俨钱宝琮科学史全集．第6卷．沈阳：辽宁教育出版社，1998．597

[12] 孙炽甫．中国古代数学家关于圆周率研究的成就．数学通报，1955（5）：5-12

[13] 钱宝琮．圆周率3927/1250的作者究竟是谁？它是怎样得来的？．数学通报，1955（5）：4-5

[14] 中国数学会数学通报编委会．初等数学史．北京：科学技术出版社，1959

[15] 司马迁．史记．北京：中华书局，1985．24

[16] 李俨．中国算学史（修订本）．见：李俨钱宝琮科学史全集．第1卷．沈阳：辽宁教育出版社，1998．373

[17] 程廷熙．3.14159265．数学通报，1953（1—2）：41

[18] 梁宗巨．数学历史典故．沈阳：辽宁教育出版社，1992．243-246

[19] 李俨．大衍求一术之过去与未来．学艺，1925，7（2）：1-45

[20] 李俨．中国数学史导言．学艺，1933年百号纪念增刊：139-160

[21] 严敦杰．李俨与数学史——纪念李俨先生诞辰九十周年．见：科学史集刊11．北京：地质出版社，1984．1-5

[22] 严敦杰．中国算学家祖冲之及其圆周率之研究．学艺．1936，15（5）：37-50

[23] 钱宝琮．古算考源．见：李俨钱宝琮科学史全集．第1卷．沈阳：辽宁教育出版社，1998．31

Li Yan’s Letters to Yan Dunjie and the π in the History of Ancient Chinese Mathematics

ZOU Dahai

(*Institute for the History of Science, CAS, Beijing* 100010, *China*)

Abstract The π (ratio of the circumference of a circle to its diameter) has been paid much attention to in the study on the history of Chinese mathematics, and several problems have been in dispute until recently. This paper reveals several Li Yan’s letters concerning π to Yan Dunjie. Comparing the arguments of these letters with his published works, it discusses Li Yan’s viewpoints and choices on four outstanding questions in different times. The four questions are: (1) Liu Xin’ π; (2) Who is the author of the paragraph about the ‘Jin Wuku’ (Jin’s Storeroom of Weaponry) from the annotations on the *yuantianshu* (method of circular field) of the *Nine Chapters on Mathematical Procedures* and the π $\frac{3927}{1250}$; (3) how to explain the record about the capacity measures in the *Lǚlizhi* (records of the music temperaments and calendars) of the *Suishu* (History of the Sui Dynasty); (4) How did Zu Chongzhi gain his π $\frac{355}{113}$. Through the discussions, the paper reflects Li Yan’s train of thought in research, academic style, and venerable demeanour. The author points out: Li Yan’s way of research that historical materials are to be combined with mechanism of computing processes, and his viewpoint that an inference of the study on history of science is essentially a hypothesis, are significant to today’s study on the history of mathematics, or even to the study on the history of science.

Key words Li Yan, Yan Dunjie, π, history for the history of science

---

* 收稿日期：2000-12-18；修回时期：2001-2-21

作者简介：邹大海（1965—），男，湖南新化人，硕士，中国科学院自然科学史研究所副研究员，主要研究中国数学史。

本文受中国科学院自然科学史研究所导向课题资助。

[①] 惟1937年发表的“中算之起原及其发达”说“刘歆作三．一四一六”，后面又说“此外尚有一圆周率作三．一四一六，亦称为祖氏所作”（[4]），但未提3.1547。此处的歆率恐是疏忽所致。因此前出版之《中国算学小史》（[5]）、《中国数学大纲》（上）（[6]）,与此文大致同时的《中国算学史》（[7]），以及以后的论著中都以3.1547为歆率，《中国算学史》还用3.1547来验算王莽铜斛的数值（[7]）。

[②] 原文作“钦”，应为“歆”。

[③] 李俨的《中国算学史》修订本仍采用原来旧本的说法，恐是疏忽。

[④] 此计算公式不容易看明白，括号“[ ]”内的式子，是注释一个乘数的获得。此式相当于：

$10\times3.14159265\left(\sqrt{5^2+5^2}-0.187\right)^2=10\times3.14159265\left(\frac{14.10472}{2}\right)^2$=1562.49565=1562.5立方寸。此处有讹误，“0.187”应为“0.0187”。

[⑤] 此式相当于：

$10\times3.14159265\left(\sqrt{5^2+5^2}+0.109\right)^2=10\times3.14159265\left(\frac{1436193}{2}\right)^2$=1620.00178=1620立方寸。李俨这里取14.36193，比原文“一尺四寸三分六厘一毫九秒二忽”多一忽，不知是否笔误。

[⑥] 原文多有刊误，今以意校读。`

E-mail: webmaster@ihns.ac.cn