



CSTAM 2012-B03-0205

LES 与 DNS 粒子轨迹的 Lyapunov 指数的比较

郭力, 晋国栋, 李栋, 张星, 何国威

中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室

第七届全国流体力学学术会议

2012 年 11 月 12—14 日 广西·桂林

LES 与 DNS 粒子轨迹的 Lyapunov 指数的比较¹⁾

郭力*, 晋国栋*, 李栋*, 张星*, 何国威*

* (中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京海淀区 100190)

摘要 本文根据 LES、DNS 和滤波以后的 DNS 的各向均匀同性湍流场计算了粒子运动的 6 个 Lyapunov 指数, 用以考察 LES 与 DNS 粒子轨迹的差别。当粒子的惯性较大时 ($St > 1$) 三种结果得到的 Lyapunov 指数相近。当粒子惯性较小时 ($St < 1$) 三种结果得到的指数各不相同, 其中差别最大的点在 St 约为 0.5 的区域。对于 St 数属于 0.1 到 2.0 范围内的所有情况, DNS 的第一个 Lyapunov 指数最大, 滤波以后的 DNS 的第一 Lyapunov 指数 (约为 0.11) 小于 DNS (约为 0.12), 但是大于 LES (约为 0.1)。前三个 Lyapunov 指数之和反映了小于 Kolmogorov 尺度上物理空间体积随时间的变化率。当三者之和小于零时粒子的轨迹收缩到一个点, 如果定义前三个 Lyapunov 指数之和从小于零转变到大于零的 St 数为临界 St 数, 则 DNS 的临界 St 数最小, 其次是滤波以后 DNS 的 St 数, 最后是 LES 的 St 数。Kaplan-Yorke 维数大于 3 时表示粒子运动不再是分形的。在 $St < 1.5$ 时 DNS、滤波以后的 DNS 和 LES 得到的 Kaplan-Yorke 维数均小于 3, 也就是粒子运动是分形的。从分形转化为不分形的临界 St 数, DNS 最小, 滤波的 DNS 次之, LES 最大。

关键词 携带粒子的湍流, LES, Lyapunov 指数

引言

携带粒子的湍流在自然界和工业中是重要的现象。在自然界中, 雨滴的形成与空气中携带的小水滴有关; 沙尘暴是空气中携带的沙尘微粒, 随大气运动引起。为了使颗粒充分混合工业中使用的流化床是流动携带粒子的流动。这些流动的雷诺数高, 流动为湍流流动。

采用数值模拟湍流携带粒子的流动可以得到每一点详细的流场速度和压力分布。真实流动的雷诺数很高, 在计算量允许的范围内采用大涡模拟 (LES) 可以尽可能提高计算的雷诺数。LES 可以解析湍流流动中的大尺度流动, 无法解析网格尺度以下的小尺度流动。LES 通过亚格子应力模型 (SGS) 反应小尺度对大尺度的作用。采用 LES 计算携带粒子的湍流时缺少了小尺度对粒子的作用, 这会引起 LES 低估了粒子动能[1]。LES 对两个粒子之间距离变化的预测怎样? 本文采用湍流中粒子的 Lyapunov 指数描述两个粒子在湍流中距离随时间的变化。粒子的 Lyapunov 指数反映了湍流中两个粒子之间的距离对初始分离距离的敏感性。如果 Lyapunov 指数为正则两个粒子所产生的轨迹, 在相空间 (粒子速度和位置) 随着时间的推移按指数方式分离, 如果 Lyapunov 指数为

负则两个相互靠近。在 St 数在 0~2 的范围内, 湍流携带的粒子的 Lyapunov 指数有两个正值, 4 个负值[2]。本文以各项均匀同性湍流为例, 比较了 LES 与 DNS 结果得到的粒子轨迹的 Lyapunov 指数。

第一部分介绍了采用 DNS 与 LES 计算湍流携带粒子流动的算法参数设置, 以及计算 Lyapunov 指数的方法。第二部分比较了 DNS 与 LES 得到的 Lyapunov 指数的区别。最后是结论。

1 数值方法

1.1 携带粒子湍流的 DNS 与 LES

本文采用 DNS 与 LES 分别计算了不可压缩各项均匀通行湍流。为了保持湍流稳定不衰减, 对湍流采用外激力。其控制方程为:

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + u_j \partial_{x_j} u_i &= -\partial_{x_i} p + \text{Re}^{-1} \partial_{x_j x_j}^2 u_i + f_i, \\ \partial_{x_i} u_i &= 0. \end{aligned}$$

其中 f_i 是为了保证湍流定常加入的外激力。计算中基于 Taylor 微尺度的雷诺数为:

$\text{Re}_\lambda = 100$ 。空间采用 Fourier 变换格式离散, 空间三个方向采用周期性边界条件。非线性项采用显式 4 阶 Adams-Bashforth 格式推进, 粘性项采用隐式 4 阶 Adams-Bashforth 格式推进 [3]。LES 的 SGS 模型为动态 Smagorinsky 模

1) 基金资助项目: U1230126, 11072247, 11021262

2) Email: hgw@lnm.imech.ac.cn

型。DNS 采用 256^3 的网计算，LES 采用 64^3 进行计算。为了考察大尺度运动对粒子的影响，而不受到 SGS 模型的影响，我们对 DNS 数据进行滤波，得到了滤波以后的粒子轨迹。滤波尺度与 LES 解析尺度相同，保留了 64^3 网格上的流场信息。

计算湍流场中的粒子时采用点粒子模型。粒子体积很小简化为质点，只考虑湍流对粒子的作用，而忽略粒子对湍流的作用以及粒子之间的相互碰撞等。描述点粒子运动的方程为：

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = -St^{-1} [v_i - u_i(\mathbf{x}(t), t)].$$

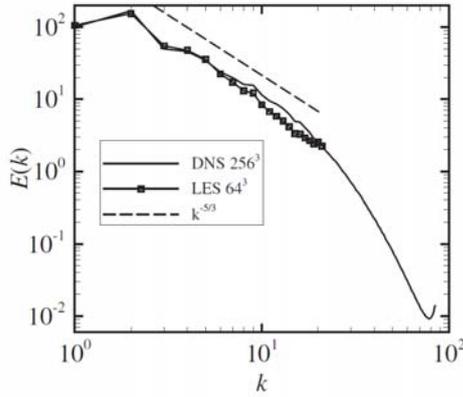


图 1.1. DNS 与 LES 湍流能谱的比较。

其中 x_i 为粒子的位置， v_i 为粒子的速度， St 数为流动特征时间 t 与粒子特征时间 $\tau_s = 2r^2 \rho / (9\nu\rho_0)$ 之间的比值 $St = \tau_s / t$ 。当粒子不在计算的网格点上的时候采用 6 阶 Lagrange 多项式进行插值得到粒子所在位置的流场速度。在湍流场达到定常状态以后，我们在湍流场中加入 400000 粒子，粒子的 St 数范围为 0.1~2.0。

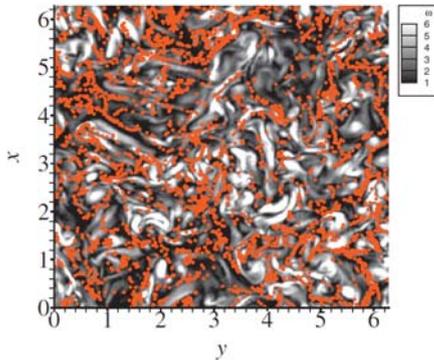


图 1.2. $St=1.0$ 时粒子在湍流场中分布 [4]。

1.2 计算 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数通过在切空间向量的伸长定义。设 $\{\mathbf{w}_1(0), \dots, \mathbf{w}_N(0)\}$ 是一组相互正交的

基向量。将第 j 基向量

$\{\mathbf{w}_1(j\Delta t), \dots, \mathbf{w}_N(j\Delta t)\}$ 代入到粒子的 Lyapunov 指数的演化方程中，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_1}{\partial x_{p1}} & \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_1}{\partial x_{p2}} & \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_1}{\partial x_{p3}} & -\frac{1}{\tau_p} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_{p1}} & \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_{p2}} & \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_{p3}} & 0 & -\frac{1}{\tau_p} & 0 \\ \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_3}{\partial x_{p1}} & \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_3}{\partial x_{p2}} & \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial u_3}{\partial x_{p3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix}_i$$

得到下一时刻的向量

$\{\mathbf{w}_1((j+1)\Delta t), \dots, \mathbf{w}_N((j+1)\Delta t)\}$ 。通过 Gram-Schmidt 正交化过程得到正交的基向量与第 l 维向量的伸长率 α_l 。

$$w_i^{(j)} = \left[w_i^{(j-1)} - \sum_{i=1}^{l-1} (w_i^{(j-1)}(j\Delta t) \cdot w_i^{(j)}(j\Delta t)) w_i^{(j)}(j\Delta t) \right] / \alpha_i^{(j)}$$

$$[\alpha_i^{(j)}]^2 = \|w_i^{(j-1)}(j\Delta t)\|^2 - \sum_{i=1}^{l-1} (w_i^{(j-1)}(j\Delta t) \cdot w_i^{(j)}(j\Delta t))^2$$

最后得到 Lyapunov 指数为：

$$\lambda_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \alpha_i^{(i)} / \Delta t$$

在粒子演化到平衡状态之后开始统计 Lyapunov 指数。统计的时间步长为 0.266 个粘性时间。

2 比较 Lyapunov 指数与分形维数

第一个 Lyapunov 指数反映了系统的混沌程度。对于 St 数属于 0.1 到 2.0 范围内的所有情况，DNS 的第一个 Lyapunov 指数最大，滤波以后的 DNS 的第一个 Lyapunov 指数小于 DNS 的情况，但是大于 LES。这是由于滤波以后的 DNS 数据与 LES 数据缺少小尺度的信息，从而减少了粒子运动的混沌性。滤波以后的 DNS 数据比 LES 数据的混沌性高是由于 LES 的 SGS 模型加入了额外粘性，从而减少了大尺度流动的混沌特性。

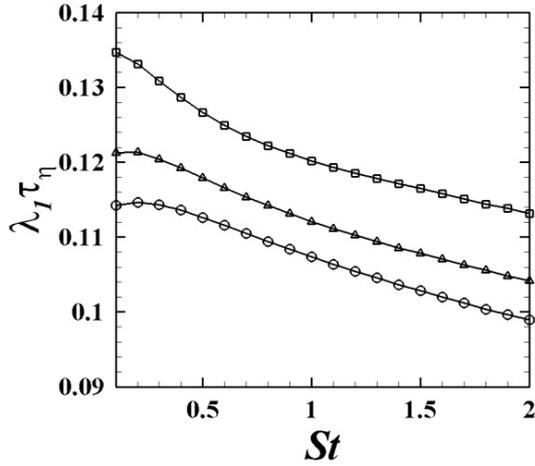


图 2.1. 第一个Lyapunov指数，第一个Lyapunov指数反映了系统的混沌程度。方形表示DNS数据，三角表示滤波以后DNS数据，圆形表示LES数据。

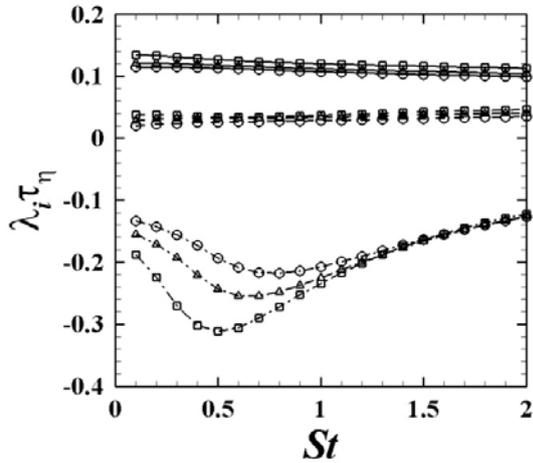


图 2.2. 前三个 Lyapunov 指数，这三个指数在 $St=0.5$ 时相差最少。方形表示 DNS 数据，三角表示滤波以后 DNS 数据，圆形表示 LES 数据。

前三个 Lyapunov 指数之和 $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 反映了小于 Kolmogorov 尺度上粒子之间的距离随时间的变化率。当 Λ 小于零时，粒子的轨迹收缩到一个点。 Λ 与 St 数相关。当 St 接近于 0 时 $\Lambda \approx 0$ 。随着 St 数的增大，指数之和先减小，小于零，再增大大于零。定义 Λ 从小于零转变到大于零的 St 数为临界 St 数。在 St 数小于临界 St 数时粘性尺度以内的粒子相互聚集。在 St 数大于临界 St 数时粘性尺度以内的粒子相互分离。DNS 的临界 St 数最小，其次是滤波以后 DNS 的 St 数，最后是 LES 的 St 数。这表明，在小于临界 St 数的时候，LES 低估了聚集速度；而在大于临界 St 数的时候 LES 又低估了分离速度。

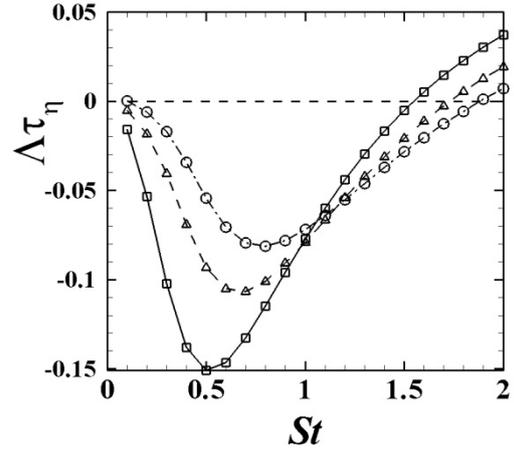


图 2.3. 前三个 Lyapunov 指数之和

$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ， Λ 反映了小于 Kolmogorov 尺度上物理空间体积随时间的变化率。当三者之和小于零时粒子的轨迹收缩到一个点。带方形的实线表示 DNS 数据，带三角的虚线表示滤波以后 DNS 数据，带圆形的点划线表示 LES 数据。

我们用 Kaplan-Yorke 维数表示粒子运动的分型特征。当 Kaplan-Yorke 维数大于 3 时表示粒子运动不再是分形的。在 $St < 1.5$ 时 DNS、滤波以后的 DNS 和 LES 得到的 Kaplan-Yorke 维数均小于 3，也就是粒子运动是分形的。从分形转化为不分形的临界 St 数，DNS 最小，滤波的 DNS 次之，LES 最大。

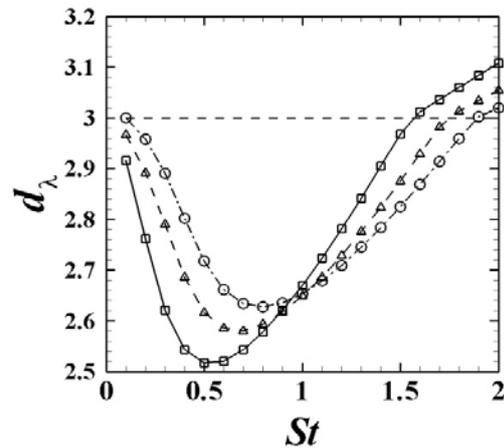


图 2.4. 为 Kaplan-Yorke 维数 $d_\lambda = J + \sum_{i=1}^J \frac{\lambda_i}{|\lambda_{J+1}|}$

(其中 J 是使得和 $\sum_{i=1}^J \lambda_i$ 大于零的最大整数)，当

Kaplan-Yorke 维数大于 3 时表示粒子运动不再是分形的。带方形的实线表示 DNS 数据，带三角的虚线表示滤波以后 DNS 数据，带圆形的点划线表示 LES 数据。

3 结 论

综上所述, LES 在粒子聚集的时候低估了粒子的聚集速度, 同时在粒子分离的时候低估了分离速度。这是由于 LES 缺少小尺度的流动引起的。我们下一步的工作是加入 LES 小尺度的随机模型, 改进对粒子聚集的预测。

参考文献

1 Jin G, He G, Wang L and Zhang J. Subgrid scale fluid velocity timescales seen by inertial particles in

large-eddy simulation of particle-laden turbulence. International Journal of Multiphase Flow, 2010, 36, 432 - 437

2 Bec J, Biferale L, Boffetta G, Cencini M, Musacchio S and Toschi F. Lyapunov exponents of heavy particles in turbulence. PHYSICS OF FLUIDS, 2006, 18, 091702

3 Wang L and Maxey M, Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. J. Fluid Mech. 1993, 256, 27

4 Jin G, He G, and Wang L, Large-eddy simulation of turbulent collision of heavy particles in isotropic turbulence, PHYSICS OF FLUIDS 2010, 22, 055106

Comparing Lyapunov exponents of particle paths in particle laden turbulence using LES and DNS

GUO Li¹, GUOWEI HE¹, XING ZHANG¹, GUODONG JIN¹, DONG LI¹

(1 State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

Abstract In this work, we calculated Lyapunov exponents of particle paths in particle laden turbulence. We compared the results from DNS, filtered DNS and LES. The Strouhal number is between 0.1 and 2.0 in our calculation. When density of particles is larger than that of fluids ($St > 1$), the exponents from the 3 kinds of calculation is almost the same. While the density of particles is smaller than that of fluids ($St < 1$), the exponents are different. The most obvious difference happens at around $St = 0.5$. The first Lyapunov exponent measures the chaotic properties of the system. The larger it is, the more chaotic the system is. The comparison of the exponents tells us the particle trajectories from DNS are the most chaotic ones, while the ones from LES are the least. The filtered DNS is between them. Summation of the first 3 parameters reflects the expansion of the distance between two particles while it is positive. The distance is shrinking while the summation is negative. Particle trajectories diverging from each other the most rapidly in DNS compared with filtered DNS and LES when St is larger than 1.5. And DNS also has the most rapidly converging rate when $St < 1.5$. LES has the most slowly separation and converging rate. Filtered DNS has something in between. We also calculated the Kaplan-Yorke dimension which indicates the trajectories are manifolds when it is less than 3. The Kaplan-Yorke number has the same trends as the summation of the first 3 Lyapunov exponents.

Key words particle laden turbulence, LES, Lyapunov exponents