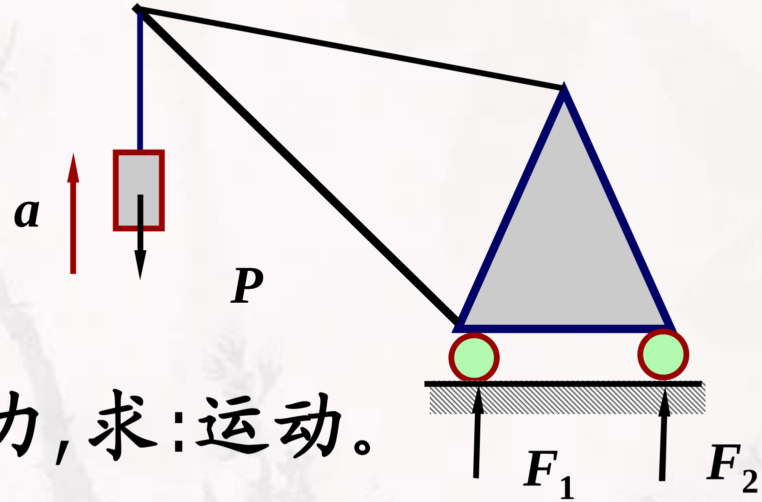
理论力学

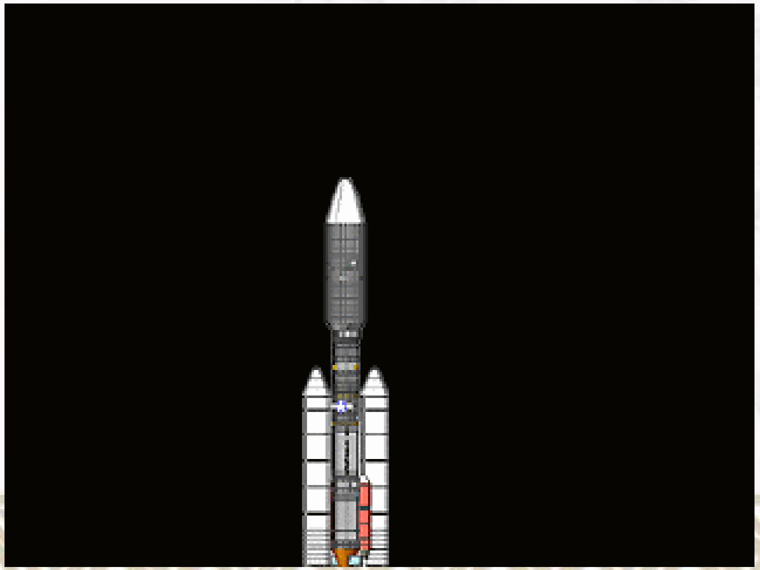
动力学

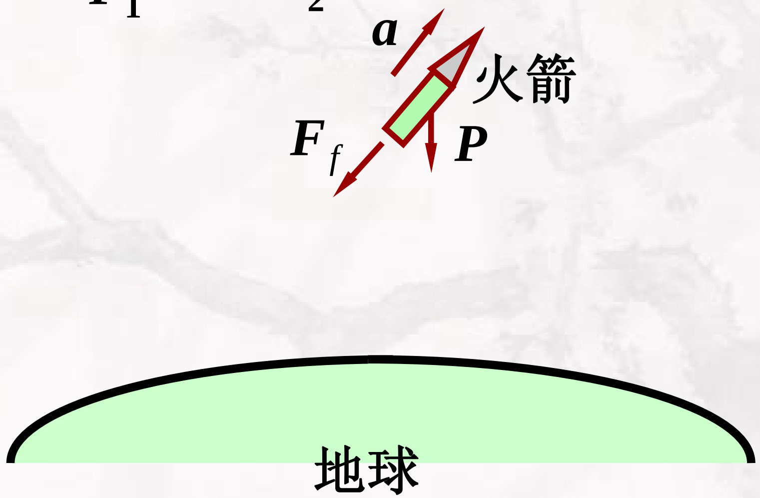
第三篇　动力学

1.第一类、已知:运动,求:力。



2.第二类、已知:力,求:运动。





第八章 动力学基本方程

§8-1 动力学的基本定律

第一定律 不受力的质点，保持静止或匀速直线运动。

第二定律 质点的运动变化率与力成正比。

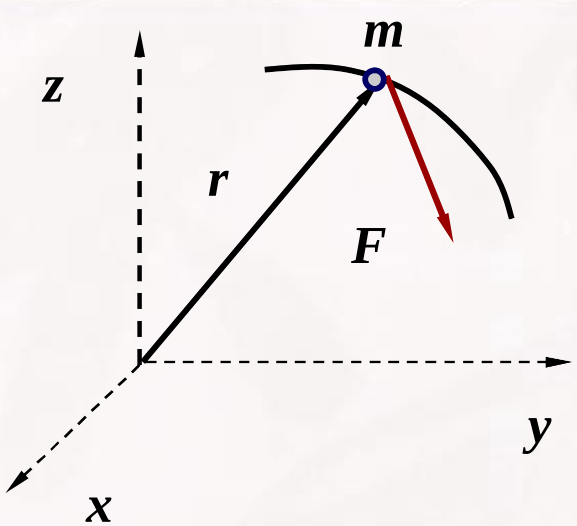
$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

第三定律 作用与反作用定律。

适用:惯性参考系。

§8-2 质点的微分方程

一、矢量式

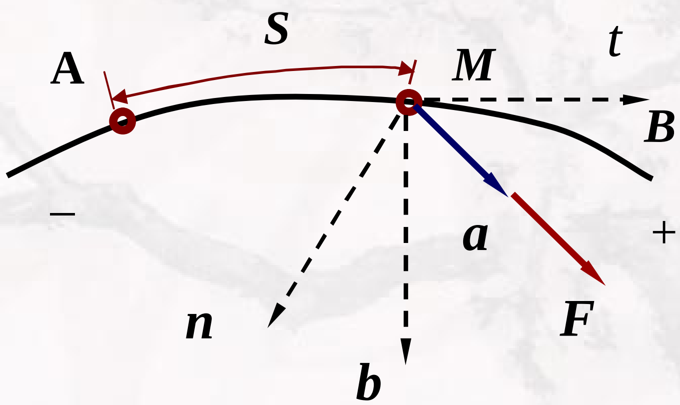


$$m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}$$

二、直角坐标式

$$m\ddot{x} = m\dot{v}_x = \sum F_x;\quad m\ddot{y} = m\dot{v}_y = \sum F_y;\quad m\ddot{z} = m\dot{v}_z = \sum F_z;$$

三、自然轴系式



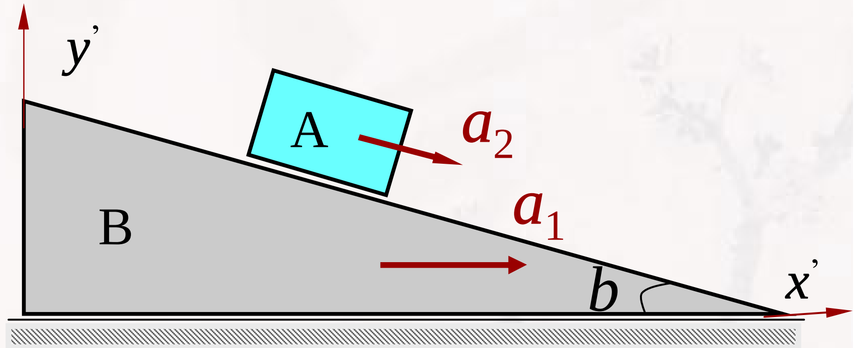
$$ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_\tau;$$

$$ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_n;$$

$$ma_b = 0 = \Sigma F_b;$$

例8-1 三角楔块放在光滑的地面上，现在楔块上放一块光滑物块以加速度a_2滑下,试求：加速度a_1与a_2之间关系。

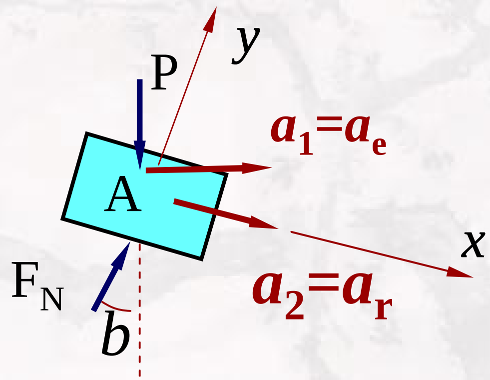
解： x: $m_A(a_1\cos b + a_2) = m_A g\sin b$



y: $m_A a_1 \sin b = F_N - m_A g\cos b$

$a_2 = g\sin b - a_1\cos b$ (1)

$F_N = m_A(a_1\sin b + g\cos b)$ (2)



讨论：

1. $a_1 > \tan b\, g$, $a_2 < 0$, 物块上升。

2. $a_1 < \tan b\, g$, $a_2 > 0$, 物块下降。

3. $a_1 = \tan b\, g$, $a_2 = 0$, 物块相对不动。

例8-2 中国古时有一位千户将自制火箭绑在所坐的椅子上，点燃火箭后试图飞离地球，试求火箭的初速度必须达到多少才可将这位千户飞离地球。

解： 已知地心引力 $F=-\mu m/x^2$，

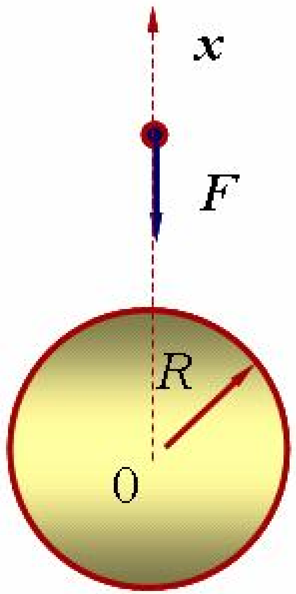
则 $F=-mgR^2/x^2$。

按初始条件 $x=R$ 时 $F=mg$ 可求得 $\mu=R^2g$，

建立微分方程：$m\ddot{x}=-m\dfrac{gR^2}{x^2}$，由：$\ddot{x}=-\dfrac{gR^2}{x^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=-\frac{gR^2}{x^2},\quad \dot{x}\mathrm{d}\dot{x}=-\frac{gR^2}{x^2}\mathrm{d}x,\quad \int_{v_0}^{v}\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}=\int_R^x-\frac{gR^2}{x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=R^2g\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right),\qquad v=\sqrt{(v_0^2-2gR)+\frac{2gR^2}{x}},$$



1. $v_0^2<2gR$，下落，

2. $v_0^2>2gR$，飞离.

$$v_0=\sqrt{2gR}=11.2\ km/s,$$

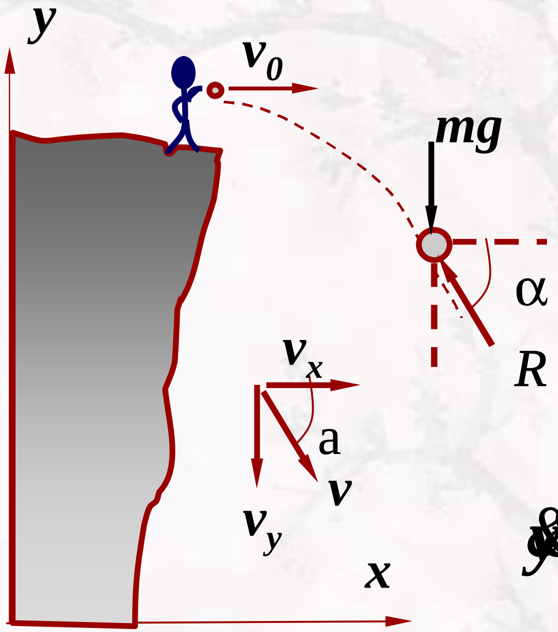
第二宇宙速度 (R=6370 km)

例8-3 一位张同学在高为h的悬崖边以v_0的速度平抛一块石子，当空气阻力$R = -kmv$时，试求：石子的位移方程。

解： 建立微分方程：

$$m\ddot{x} = -R\cos\alpha = -kmv\frac{v_x}{v} = -km\dot{x},$$

$$m\ddot{y} = -R\sin\alpha - mg = -km\dot{y} - mg,$$



$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\,dt, \quad \ln \dot{x}\Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} = -kt,$$

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}, \quad dx = -\frac{v_0}{k}e^{-kt}\,d(-kt),$$

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}),$$

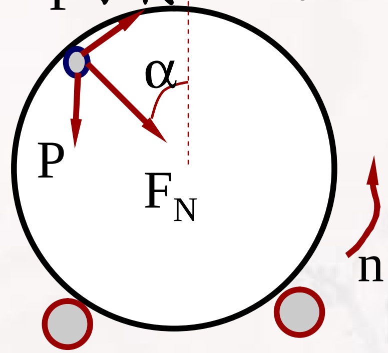
$$\ddot{y} = -k\dot{y} - g, \quad \frac{k\,d\dot{y}}{k\dot{y} + g} = -k\,dt, \quad \ln(k\dot{y} + g)\Big|_0^{\dot{y}} = -kt,$$

$$k\dot{y} + g = ge^{-kt}, \qquad dy = g\frac{(e^{-kt} - g)}{k}dt,$$

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}),$$

当:y=0求:t 代入x 位移方程则是石子下落距离。

例8-4 圆柱破碎机械中放置钢球与石块，为使石块破碎效率最佳，应使转动圆柱中的钢球达到最高位置再落下，试求此时转次n。



解： 建立法线方向的微分方程：

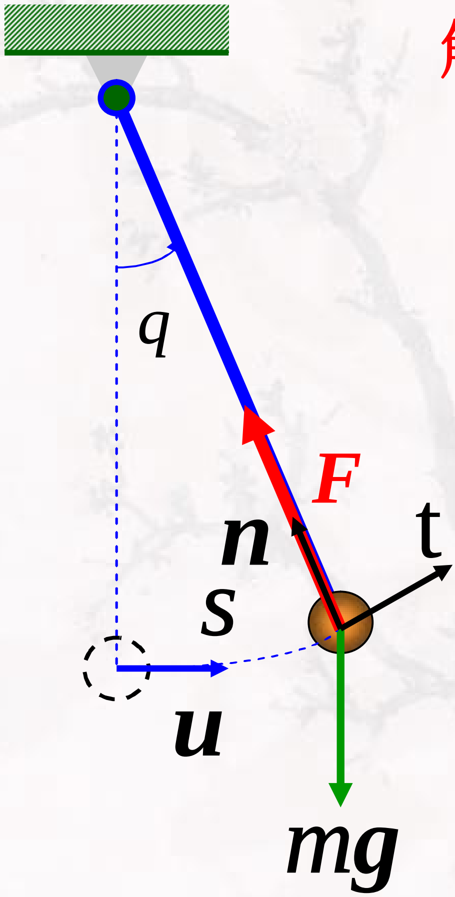
$$ma_{\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{R} = F_{\mathrm{N}} + P\cos a,$$

$$v = \frac{pn}{30}R,\quad \text{代入后：}\quad n = \frac{30}{pR}\sqrt{\frac{R}{m}(F_{\mathrm{N}} + P\cos a)},$$

当 $F_{\mathrm{N}}=0$, $\quad n = \dfrac{30}{p}\sqrt{\dfrac{g}{R}\cos a},$

当最高位置 $a=0$, $\quad n = \dfrac{30}{p}\sqrt{\dfrac{g}{R}},$

例8-5：质量为 m 长为 *l* 的摆在铅垂面内摆动。初始时小球的速度为*u*，*q* = 0。求绳作用在小球上的力*F*(*q*)，并分析小球的运动。



解:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

运动微分方程

t :　$ml\ddot{q} = -mg\sin q$

n :　$ml\dot{q}^2 = F - mg\cos q$

积分上式可得：

$$\boxed{F = mg(3\cos q - 2) + m\frac{u^2}{l}}$$

分析小球的运动

（1）微幅摆动

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$$

微分方程的通解

$$\theta = A\sin(\omega t + \varphi)$$

初始条件：

$$\theta_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = \frac{v}{l}$$

确定积分常数

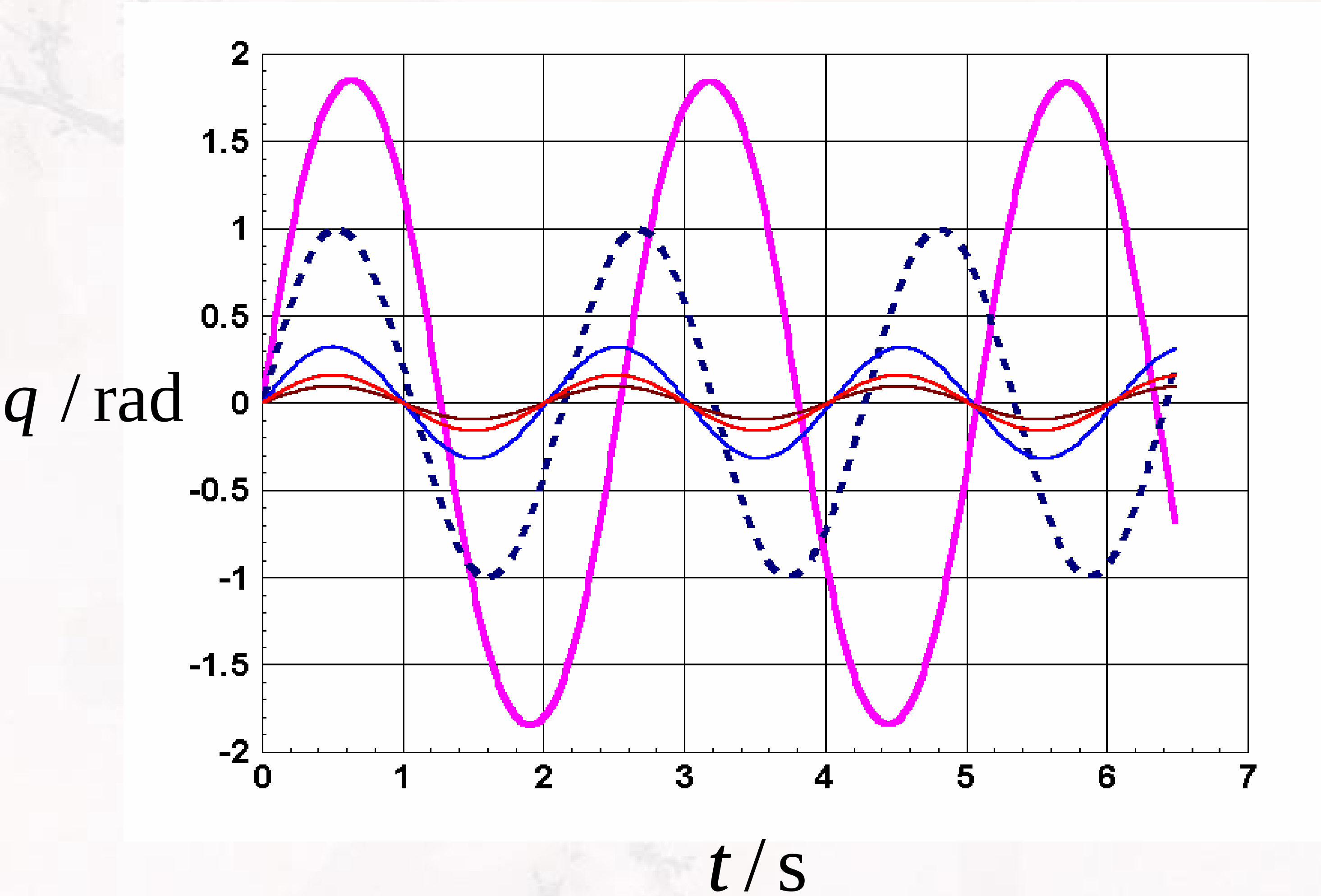
$$A = \frac{v}{l\omega}, \quad \varphi = 0$$

运动特点：等时性

（周期与初始条件无关）

（2）大幅摆动

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$



大幅摆动不具有等时性


本章结束