

文章编号: 0253-9993(2008)05-0527-05

# 基于 GTP 单纯剖分的地下实体拓扑关系 形式化描述方法

邓念东, 侯恩科

(西安科技大学 地质与环境工程系, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 以点集拓扑学为基础, 用集合对单纯形和单纯复形进行了形式化描述; 讨论了 GTP 模型进行单纯剖分的必要性和形式描述的完备性, 在给出确定 GTP 模型顶点编号方法的基础上, 对 GTP 模型进行单纯剖分和形式化描述; 利用代数运算和集合运算相结合的方法计算出 GTP 模型内部和边界及相互之间的交集, 运用维度扩展法判断交集的维数, 并定义了一个拓扑关系集合 {disjoint, touches, within, crosses, overlaps, contains, equal}, 进一步采用面向对象的方法, 推导和描述了三维实体之间的拓扑关系。

**关键词:** GTP; 单纯剖分; 拓扑关系; 形式化描述

**中图分类号:** P221

**文献标识码:** A

## Formal description of topological relations for geo-entity based on simplicial decomposition of GTP model

DENG Nian-dong, HOU En-ke

(Department of Geology and Environmental Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** With the introduction of the concept of  $k$ -simplex and  $k$ -complex ( $0 \leq k \leq 3$ ), formal description of them in the GIS was given. With discussion of division based on  $k$ -complexes and their exclusiveness and completeness with respect, the coding of GTP vertexes and coding steps were discussed in detail, and formal description of GTP model was given. An approach was proposed to describe the topological relations between GTP model with topological components of  $k$ -complex ( $0 \leq k \leq 3$ ), i. e. boundary and interior. The topological relationship set: {disjoint, touches, within, crosses, overlaps, contains, equal} for the pair of GTP models were defined with dimension-extended. With object-oriented method, the topological relations were defined for the geo-entity.

**Key words:** GTP; simplicial decomposition; topological relations; formal description

三维空间对象间存在多种关系, 如度量关系、顺序关系、拓扑关系等, 其中最为重要的是拓扑关系, 它表达了空间对象之间固定的, 不随拓扑变换 (如旋转、缩放和转换等) 变化的性质, 在空间数据组织、空间分析、空间查询、空间推理和空间一致性检验等方面都有重要应用<sup>[1]</sup>。

广义三棱柱 (Generalized Tri-Prism, GTP) 模型是针对地质钻孔偏斜而提出的一种真 3D 地质建模体元模型。吴立新等提出 GTP 构模方法, 并建立了 6 类几何元素的拓扑关系<sup>[2]</sup>; 为了表达三维空间实体及其之间的拓扑关系, 需要研究和发 展三维空间实体及其之间拓扑关系的语义描述和形式化表达方法<sup>[2]</sup>。

收稿日期: 2007-06-03 责任编辑: 柴海涛

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (40572165); 西安科技大学培育基金资助项目 (200609)

作者简介: 邓念东 (1976—), 男, 湖南衡阳人, 讲师, 博士研究生. E-mail: gissearch@163.com

王彦兵等针对 GTP 进行平面剖切会产生空洞的缺陷, 引入四面体对 GTP 模型进行扩展<sup>[3]</sup>, 但没有论证空间剖分的紧致性和完备性, 且缺少对 GTP 和三维实体的形式化描述以及进行拓扑关系描述. 三维实体及其间拓扑关系的语义描述和形式化描述是三维 GIS 空间数据建模的重要理论基础. 笔者在前人研究的基础上, 以拓扑学理论为指导, 基于 GTP 模型的单纯剖分对其进行形式化描述和拓扑关系描述.

## 1 单纯复形的形式化描述

### 1.1 单纯形的形式化表达<sup>[4]</sup>

$k$ -单纯形是一个凸  $k$ -面体. 对三维欧氏空间而言, 可表达全集信息<sup>[4]</sup>为

$$S_3 = \bigcup_{i=0}^3 S_i(\cdot), \tag{1}$$

式中,  $S_i(\cdot)$  为  $i$ -单纯形构成的集合.

### 1.2 单纯复形的形式化描述<sup>[4]</sup>

$n$ -单纯形  $S_n$  的边界 ( $\partial S_n$ ), 由所有组成  $S_n$  的  $n-1$  维面组成, 其边界<sup>[4]</sup>为

$$\partial S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_i^{n-1}, \tag{2}$$

其中  $S_i^{n-1} = \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$ ,  $\hat{v}_i$  表示要被去掉, 且

$$\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle + \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_0 \rangle = 0. \tag{3}$$

单纯复形  $C_n$  的边界 ( $\partial C_n$ ) 是  $C_n$  的所有单纯形  $S_n$  的边界的和, 即

$$\partial C_n = \sum_{i=0}^{n-1} \partial S_n. \tag{4}$$

复形  $C_n$  的  $n$ -骨架 ( $C_n^{(n)}$ ) 是  $C_n$  的维数最大为  $n$  的所有  $C_n$  单纯形的并集, 即

$$C_n^{(n)} = \bigcup_{i=0}^n S_i. \tag{5}$$

$n$ -复形  $C_n$  的内部 ( $C_n^\circ$ ) 是  $C_n$  的  $n$ -骨架的所有不属于边界 ( $\partial C_n$ ) 的面的集合, 即

$$C_n^\circ = C_n^{(n)} - \partial C_n. \tag{6}$$

## 2 GTP 的四面体剖分

### 2.1 顶点编码方法

陈学习、车德福等基于 QuaPA 编码原理对 GTP 顶点 ID 进行编码, 并提出了一种最小顶点标识法 (SVD) 引入对角线, 实现 GTP 与四面体间的转换<sup>[5,6]</sup>. 他们提出 GTP 的四面体剖分可通过其顶点标识编码和侧面四边形的对角线连接依次完成. 顶点标识编码必须满足 2 个条件: ① 标识号为常数, 而且惟一; ② 标识号可以比较大小. 其确定编码惟一性和可比较大小的目的是保证 GTP 四面体剖分的惟一性, 实际上只需要保证每一个 GTP 的顶点标识号惟一且可以比较大小即可. 如果基于 QuaPA 编码, 在 GTP 模型中增加新的结点的情况下就需要动态修改数据库的标识号, 且计算过程复杂和额外增加大量的存储空间. 笔者考虑所有顶点的空间位置实际隐藏在顶点的坐标信息中, 无需新增一个字段去存储标识号. 针对某一个研究区域进行三维地质建模, 为保证一定的精度, 其 GTP 的粒度 ( $d$ ), 可由 TIN 边和侧边的最大长度的数量级表征, 如  $0 < \max(\text{len}) \leq 10 \text{ m}$ , 则  $d = 1$ ,  $10 \text{ m} < \max(\text{len}) \leq 100 \text{ m}$ , 则  $d = 2$ , 依次类推可设定为 3 或 4, 粒度取值区间为  $[1, 4]$ , 其值可以在建模时由建模人员设定, 也可以由系统自动计算. 基于粒度的定义, 标识号可由顶点的坐标在剖分时动态建立, 这样既可保证标识号惟一又可以比较其大小, 并无需存储在空间数据库中. 如图 1 的 GTP (假设粒度为 2),

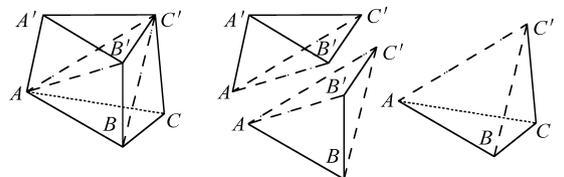


图 1 GTP 剖分为 3 个四面体

Fig. 1 A GTP component divided into three tetrahedrons

可以将顶点  $(A, B, C, A', B', C')$  分别由其顶点的  $x, y, z$  的十位和个位进行位运算即可组合而成。

如  $A$  的坐标为  $(4\ 076\ 350.23, 38\ 567\ 825.45, -275.26)$ ,  $A$  点的标识号可以表示为  $50 \ll 2d + 25 \ll d + 75 = 50 \ll 4 + 25 \ll 2 + 75 = 502\ 575$ , 即  $x$  十位和个位右移 4 位加上  $y$  十位和个位右移 2, 再加上  $z$  十位和个位。

### 2.2 GTP 的四面体剖分

设某个拓扑空间同胚于某个欧氏空间内一组很好地拼合起来的有限个单纯形, 即如果 2 个单纯形相交, 它们的公共部分必是一个公共面, 则这个拓扑空间是可以单纯剖分的。拓扑空间  $X$  的一个单纯剖分由一个单纯复形  $C_n$  与一个同胚  $h: |C_n| \rightarrow X$  二者共同组成, 记作  $X = (C_n, h)$ 。因此, 三维实体的单纯剖分模式不是惟一的, 它取决于单纯复形  $C_n$  的选择及剖分同胚  $h$  的选择。但是每种模式分解得到的所有单纯性形都是三维实体的一个完整镶嵌, 并且不影响三维实体的拓扑描述<sup>[4,7]</sup>。为了确定对三维实体的剖分方式, 引入维数的概念。

组合拓扑学定义单纯形  $S_n$  的维数  $(\dim(S))$  为一个比其结点数少 1 的数; 单纯复形的维数  $(\dim(C_n))$  为复形  $C_n$  的所有单纯形的维数的最大值。即  $\dim(S) = n - 1, \dim(C_n) = \sup(\dim(S_i)) (S_i \in C_n)$ <sup>[4]</sup>。

对三维实体采用与实体相同维数的单纯形对三维实体进行空间剖分, 这样任意一个三维实体可以通过同维单纯复形  $(0 \leq k \leq 3)$  来描述, 其空间扩展及空间关系由一系列的几何元素 (即单纯形) 所表达, 单纯形间的拓扑性质则揭示出三维实体与其几何元素间的拓扑关系, 这为空间数据模型的建立提供了强有力的理论指导。如果构成单纯复形  $C_n$  的所有极大单纯形的维数相等, 称  $C_n$  为纯  $n$ -单纯复形。据此, 对 GTP 模型可以使用纯 3-单纯复形 (四面体) 进行单纯剖分。当需要对 GTP 进行四面体剖分时, 通过比较其侧面四边形的顶点标识号, 每一个侧面从具有最小标识号的顶点向其对角连对角线, 即可完成剖分操作<sup>[5,6]</sup>。

如图 1 所示, 以 GTP 侧面对角线为例, 说明 GTP 的四面体剖分方法。如果根据 2.1 节 GTP 顶点编码方式确定图中 GTP 模型  $ABCC'B'A'$  顶点编码大小顺序:  $A < A' < B < B' < C < C'$ , 则在 3 个侧面中, 对于  $ABB'A'$  侧面  $A$  的标识号最小, 则从  $A$  向其对角线  $B'$  连线  $AB'$ 。同理可以连接其它两个侧面的对角线  $AC', BC'$ 。根据此编码方式就以惟一的方式将该 GTP 模型剖分为 3 个四面体 ( $AA'B'C', ABB'C', ABCC'$ )。对于任意一个 GTP 模型可以剖分为 3 个四面体, 且 GTP 模型的 TIN 面退化模型是四面体, GTP 模型的侧边退化是 Pyramid 模型, 而 Pyramid 模型又可以分为 2 个四面体模型<sup>[3,8]</sup>。因编码大小隐含于坐标中, 不需要显式编码, 则剖分方式和剖分的四面体都不需要显式存储在空间数据库中, 这样即保证了剖分的惟一性和节省存储空间。

### 3 基于单纯剖分的 GTP 模型形式化描述

由式 (1) 可知,  $k$ -单纯形  $(1 \leq k \leq 3)$  的全集信息表达并不惟一, 这是因为单纯形的定向问题, 为了保证单纯形表达的惟一性和简化集合求并运算, 除 0-单纯形没有方向, 作以下规定:

**规定 1** 如果 1-单纯形的顶点编号  $P_i < P_j$ , 则正向表示为  $P_iP_j$ , 反向表示为  $P_jP_i$ 。

**规定 2** 如果 2-单纯形的 3 个顶点的顶点编号  $(P_i, P_j, P_m)$  中  $P$  最小, 则定向为绕正法线 (三角形的法线指向 GTP 外部为正) 的顺时针方向  $(P_i \rightarrow P_j \rightarrow P_m \rightarrow P_i)$ , 正向表示为  $P_iP_jP_m$ , 反向表示为  $P_iP_mP_j$ 。

**规定 3** 四面体 (3-单纯形) 以顶点编号从小到大的顺序纪录。

根据以上规定, 以标准 GTP 模型为例说明 GTP 模型形式化描述的步骤:

(1) 计算 GTP 的边界, 可以分解为两步, 首先将  $C_3$  中  $k$ -单纯形  $(0 \leq k \leq 2)$  视为一组  $k$  维向量, 利用代数运算得到每维单纯形几何  $S_k(\cdot)$  的边界; 然后得到单纯复形的边界, 根据式 (3) 可表示为

$$\partial C_3 = \bigcup_{i=0}^2 (\sum S_i^j(\cdot)) = \sum S_0 + \sum S_1 + \sum S_2. \tag{7}$$

由式 (2) 可知, 公共面在集合运算时会相互抵消, 如图 1 中四面体  $AA'B'C'$  和  $ABB'C$  的公共面分别

表示为  $AC'B'$  和  $AB'C'$ , 且  $AC'B' + AB'C' = 0$ .

(2) 根据式 (5) 求 GTP 的 3-骨架 ( $C_3^{(3)}$ ), 是 GTP 中维数最大为 3 的所有单纯形的并集, 即

$$C_3^{(3)} = \bigcup_{r=0}^3 S_1. \quad (8)$$

根据 3 个规定, 图 1 的 GTP 中如果顶点编码大小顺序为  $A < A' < B < B' < C < C'$ , 则 1-单纯形的集合  $\Sigma S_1$  为,  $\langle AA', BB', CC', AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C' \rangle$ ; 2-单纯形集合  $\Sigma S_2$  为  $\langle ABC, A'B'C', AA'B', ABB', AA'C', ACC', BB'C', BCC' \rangle$ . 3-单纯形集合  $\Sigma S_3$  为  $\langle AA'B'C', ABB'C', ABCC' \rangle$ .

(3) 根据式 (6) 可以求得三维实体 (体) 的内部, 可表示为

$$C_3^\circ = C_3^{(3)} - \partial C_3. \quad (9)$$

## 4 三维实体拓扑关系描述

### 4.1 GTP 拓扑关系描述

为了表达三维实体及其之间的拓扑关系, 需要研究和发展三维实体及其之间拓扑关系的语义描述和形式化表达方法<sup>[2]</sup>. 对拓扑关系的形式化方法研究较有代表性的成果有 4I 模型<sup>[9]</sup>、9I 模型和 RCC 模型<sup>[9]</sup>. 陈军、郭薇提出了顾及维数的三维实体间拓扑关系的形式化描述框架<sup>[2]</sup>, 并定义了欧氏空间总任意  $k$ -单纯形之间的 5 种拓扑关系 (touch, in, cross, overlap, disjoint). 在此基础上, 笔者根据单纯形和单纯复形的维度扩展完善了纯  $k$ -单纯复形的拓扑关系定义, 定义了一个拓扑关系集合 {disjoint, touches, within, crosses, overlaps, contains, equal} 如下:

(1) 相离 (disjoint) 关系,  $\langle A_n, \text{disjoint}, B_n \rangle \Leftrightarrow (A_n \cap B_n = \emptyset)$ ;

(2) 相邻 (touches) 关系,  $\langle A_n, \text{touches}, B_n \rangle \Leftrightarrow (\dim(A_n^\circ \cap B_n^\circ) = 0) \wedge (\dim(A_n \cap B_n) > 0)$ ;

(3) 包含 (within) 关系,  $\langle A_n, \text{within}, B_n \rangle \Leftrightarrow (\dim(A_n^\circ \cap B_n^\circ) > 0) \wedge (A_n \cap B_n = A_n)$ ;

(4) 相交 (crosses) 关系,  $\langle A_n, \text{crosses}, B_n \rangle \Leftrightarrow (\dim(A_n^\circ \cap B_n^\circ) < \sup(\dim(A_n^\circ), \dim(B_n^\circ))) \wedge (A_n \cap B_n \neq A_n) \wedge (A_n \cap B_n \neq B_n)$ ;

(5) 部分覆盖 (overlaps) 关系,  $\langle A_n, \text{overlaps}, B_n \rangle \Leftrightarrow (\dim(A_n^\circ \cap B_n^\circ) = \dim(A_n^\circ) = \dim(B_n^\circ)) \wedge (A_n \cap B_n \neq A_n) \wedge (A_n \cap B_n \neq B_n)$ ;

(6) 包含于 (contains) 关系,  $\langle A_n, \text{contains}, B_n \rangle \Leftrightarrow \langle B_n, \text{within}, A_n \rangle$ ;

(7) 相等 (equal) 关系,  $\langle A_n, \text{equal}, B_n \rangle \Leftrightarrow \langle A_n = B_n \rangle$ .

维数扩展法描述的每一种拓扑空间关系, 均可用 4 个反映 2 个目标间边界与内部交集的条件表达式的逻辑交来表示, 可记为  $T_1(\partial A \cap \partial B) \wedge T_2(\partial A \cap \partial B^\circ) \wedge T_3(A^\circ \cap \partial B) \wedge T_4(A^\circ \cap B^\circ)$ .

对其中每一项逻辑表达式  $T_i$  均由 GTP 与边界及所定义的 5 种拓扑空间关系构成, 根据该逻辑关系式可以定义 GTP 间的拓扑关系.

### 4.2 三维实体拓扑关系描述

侯恩科<sup>[10]</sup>和吴立新<sup>[11]</sup>采用面向对象的方法, 将三维实体抽象为点、线、面和体 4 类, 体类又进一步划分为体元、简单体、复合体、复杂体. 根据面向对象的观点, 简单体是体元 (如 GTP) 的集合组成, 复杂体是同一类型简单体的联合, 复合体则是不同类型简单体的聚类. 因此, 复合体和复杂体可由简单体来定义, 简单体可由体元 (GTP) 来定义, 体元可由单纯形和单纯复形来表示. 进一步, 三维实体之间的拓扑关系可由体元之间的拓扑关系来进行推导和描述. 下面以推导复杂体之间的拓扑关系推导为例, 说明基于 GTP 拓扑关系推导和描述三维实体之间的拓扑关系的思路和步骤:

假设 2 个复杂体  $A, B$ , 分别由  $n$  和  $m$  个简单体组成, 分别为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  和  $B_1, B_2, \dots, B_m$ .

(1) 判断简单体 (如  $A_i, B_j, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$ ) 之间的拓扑关系. 首先根据式 (7) 求所有简单体的边界, 如  $\partial A_i = \cup \partial C(\cdot)$ , 根据式 (8) 求所有简单体的内部, 如  $B_j^\circ = \cup C^\circ(\cdot)$ . 利用 4.1 中对 5 种拓扑关系的定义和式 (9), 可以判断出简单体之间的拓扑关系, 记  $A_i$  与  $B_j$  之间的拓扑关系为  $P_{A_i B_j}$ .

(2) 建立复杂体  $A, B$  之间的拓扑关系. 可用以下拓扑关系矩阵表示, 即

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} P_{A_1B_1} & P_{A_1B_2} & \cdots & P_{A_1B_n} \\ P_{A_2B_1} & P_{A_2B_2} & \cdots & P_{A_2B_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{A_mB_1} & P_{A_mB_2} & \cdots & P_{A_mB_n} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

这种三维实体拓扑关系的层次细化使空间关系的描述更加清晰, 便于把握拓扑关系的本质. 对于复杂三维实体(如复合体、复杂体), 可以从复杂到简单逐层划分, 高一级的三维实体可以由低一级三维实体或体元的拓扑处理, 不涉及低一级三维实体的处理细节. 对于复杂三维实体, 存在与其结构相对应的拓扑处理应用结构. 信息隐藏机制使引用结构保持良好的独立性, 局部拓扑关系不会强烈影响全局的拓扑关系<sup>[12]</sup>.

## 5 结 语

以点集拓扑学为基础, 基于空间剖分用单纯形和单纯复形对 GTP 进行形式化描述, 利用代数运算和集合运算相结合的方法计算出 GTP 内部和边界及相互之间的交集, 运用维度扩展法判断 GTP 间的拓扑关系; 基于面向对象的方法, 进一步推导和描述三维实体之间的拓扑关系. 下一步需要基于 GTP 模型的数据结构, 建立 GTP 模型的另外一个拓扑不变量(序列), 完善三维实体的拓扑关系和三维空间查询、空间分析、空间推理和知识发现等工作.

## 参考文献

- [1] Guo Wei, Zhan Ping, Chen Jun. Topological data model for 3D GIS [J]. APRS, 1998, 32 (4): 657 ~ 661.
- [2] 郭 薇, 陈 军. 基于点集拓扑学的三维拓扑空间关系形式化描述 [J]. 测绘学报, 1997, 26 (2): 30 ~ 35.
- [3] 王彦兵, 吴立新, 史文中. GTP 模型中四面体的引入及其空间模型扩展 [J]. 地理与地理信息科学, 2003, 19 (5): 16 ~ 19.
- [4] 邓念东, 侯恩科, 张志华, 等. 三维拓扑关系形式化描述及拓扑关系模型研究 [J]. 西安建筑科技大学学报, 2007, 39 (6): 873 ~ 877.
- [5] 陈学习, 吴立新, 史文中, 等. GTP 模型中对角线引入的最小顶点标识 (SVID) 法 [J]. 地理与地理信息科学, 2004, 20 (3): 17 ~ 21.
- [6] 车德福, 陈学习, 吴立新, 等. 基于广义三棱柱体元的三维地层建模方法 [J]. 辽宁工程技术大学学报, 2006, 31 (1): 576 ~ 580.
- [7] 邓 敏, 张雪松, 林宗坚. 拓扑关系形式化描述的 Euler 示性数模型 [J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2004, 29 (10): 872 ~ 876.
- [8] 吴立新, 史文中, Christopher Gold. 3D GIS 与 3D GMS 中的空间构模技术 [J]. 地理与地理信息科学, 2003, 19 (1): 5 ~ 11.
- [9] Egenhofer M. Reasoning about binary topological relations [A]. Proceedings of the 2nd International Symposium on Advances in Spatial Databases [C]. Zurich, 1991. 143 ~ 160.
- [10] 侯恩科, 吴立新. 面向地质建模的三维体元拓扑数据模型研究 [J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2002, 27 (5): 467 ~ 472.
- [11] 吴立新, 陈学习, 车德福, 等. 一种基于 GTP 的地下真 3D 集成表达的实体模型 [J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2007, 32 (4): 331 ~ 335.
- [12] Molennar M A. Topology for 3D Vector Maps [J]. ITC Journal, 1992 (1): 25 ~ 33.