第五、六章　动态电路的瞬态分析

许多实际电路不能只用电阻和电源元件来构造模型，往往还包含电容元件和电感元件，这两种元件的伏安关系都涉及对电流、电压的微分和积分，称为动态元件。含动态元件的电路称为动态电路。

这两章讨论的动态电路限于一阶和二阶电路。

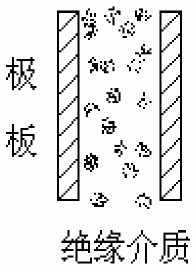
§5 —1　电容元件和电感元件

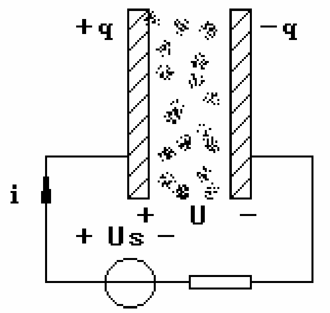
一、电容元件

1．电容元件及其库伏特性

工程中电容器的应用极为广泛，那么究竟什么是电容器呢？

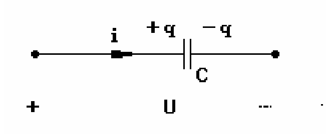
将两块金属极板用绝缘介质隔开，就形成了一个电容器。加上电源后，极板上分别聚集等量异号的电荷，在绝缘介质中建立起电场，并储存有电场能量，即 $U \rightarrow \pm q \rightarrow$ 存储电场能量。

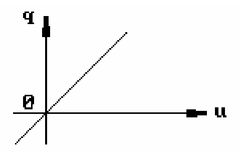




实际电容器 $\xrightarrow{\text{忽略其介质、漏电损耗}}$ 电容元件

线性电容元件：理想二端元件，在电路中的图形符合为：





由图示参考方向，有 $q = Cu$ (库伏关系特性)

∴　库伏特性为 u 、q 平面上的一条过原点的直线。

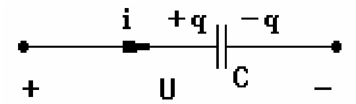
式中，C 定义为该电容元件的电容，即：$C = \dfrac{q}{u}$

单位：法(拉)F

	mF	$10^{-6}\,F$	
常用辅助单位：	nF	$10^{-9}\,F$	纳法
	pF	$10^{-12}\,F$	

※非线性电容的特性曲线不是通过原点的直线。

2．电容元件的 *VAR*



如上图：当极板间电压变化时，极板上电荷也随之改变，于是电容器电路中出现电流。当 u 、i 关联方向时，$i(t)=\dfrac{dq}{dt}=C\dfrac{du_c(t)}{dt}$ 。

可见：

1) C 为动态元件，u 变化才有 i ；u 不变化，相当于 DC 时，$\rightarrow$

$i=0\rightarrow C$ 开路(隔直作用)；

2) 由于 i 为有限值，u_c 不会跃变；

$$u_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}i(x)dx+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i(x)dx$$

令：　$u_c(0)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}i(x)dx$

则：　$u_c(t)=u_c(0)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{0}^{t}i(x)dx$　　　　记忆元件

3)　$u>0$，且 $\dfrac{du}{dt}>0$，$\rightarrow i>0$，充电　$q\uparrow$

$u>0$，且 $\dfrac{du}{dt}<0$，$\rightarrow i<0$，放电　$q>0$，但 $|q|\downarrow$

又　$u<0$，且 $\dfrac{du}{dt}<0$，$\rightarrow i<0$，　$q<0$，但 $|q|\uparrow$　反向充电

当　$u<0$，且 $\dfrac{du}{dt}>0$，$\rightarrow i>0$，　$q<0$，但 $|q|\downarrow$　反向放电

总之，$|u|\uparrow\ \rightarrow\ |q|\uparrow\ \rightarrow$ 某个方向充电 $\rightarrow$ 储存能量↑

$|q|\downarrow\ \rightarrow$ 某个方向放电 $\rightarrow$ 释放能量↓

3．电场能量

u 、i 关联方向时，电容元件吸收的功率为：

$p(t)=u(t)\times i(t)=Cu(t)\dfrac{du(t)}{dt}$，则在 $dt=(t_o，t)$ 时间内，电容元件电场中的能量增加量为：$dW=pdt=Cu(t)du(t)$

则 t_o～t 期间外电路供给电容的能量应为：

$$W_c(t)=\int_{t_o}^{t}u(x)\times i(x)dx$$

$$=\int_{t_o}^{t}Cu(t)du(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)\Big|_{t_o}^{t}=\frac{1}{2}C[u^2(t)-u^2(t_o)]$$

如果充电是从 $t_o=-\infty$ 开始，即 $u(-\infty)=0$，可知电容充电到 $u(t)$ 时，电容的储能为：

$$W_c(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)\geq 0$$

某个时刻电场能量只与当时的电压值有关，而与电压建立过程无关。总之 C 为储能元件，是无源元件(不会释放出比它所储能量还多的能量)。

二、电感元件

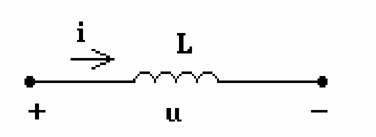
定义：如图(P.96 图 5－4(a))所示，把金属导线绕在一骨架上就构成了实际的电感器(或称电感线圈)。

1．电感元件及其韦安关系

电感是反映磁场能性质的电路参数，电感元件是实际线圈的理想化模型，假想它是由无阻导线绕制而成的线圈。当一匝线圈中通以电流 i 后，在线圈内部将产生磁通 f_L(称为自感磁通)，N 匝相链的线圈通过 Nf_L，记 $y_L=Nf_L$， y_L 称做磁通链(或磁链)，即 N 匝相链的线圈通过的自感磁通之和。

f_L和y_L是由线圈本身的电流产生的，叫做自感磁通和自感磁通链。

线性电感元件的图形符号为：



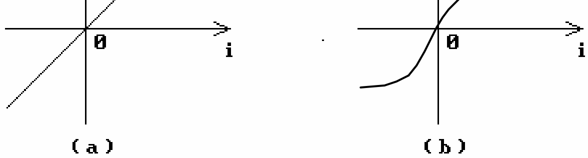
我们规定磁通 f_L和磁通链y_L的参考方向与电流参考方向之间满足右手螺旋法则，在这种参考方向下，任何时刻线性电感元件的自感磁通链y_L与电流 i 是成正比的。

有 $y_L=Li$ **(称为韦安关系)**

式中：L 称为该元件的自感或电感，是一个正实常数，单位：亨(H)，辅助单位有：mH、mH； f_L 、 y_L 的单位：韦伯 Wb。

由上式知，电感元件的特性表征为磁链y_L与电流 i 的关系(韦安特性)。

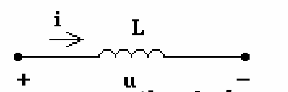
对于线性电感，在y－i 平面上，特性曲线为一条通过原点的直线，如下图(a)，否则称非线性电感，如图(b) 。



(a) (b)

2．电感的伏安关系 VAR

在电感元件中，当电流 i **随时间变化时，磁链** y_L **也随时间改变。根据法拉第电磁感应定律，此时元件中产生感应电压，感应电压等于磁链的变化率，如果取** u、i **关联方向时，电感的** VAR **为：**



$$u(t)=\frac{dy(t)}{dt}=L\frac{di(t)}{dt} \qquad (*)$$

可见：(1) L **为动态元件，**(i **变化，才有** u)**。**

(2) **电流不变，即** DC **时，** $u=0$，L **相当于短路。**

(3) i **跃变**($\frac{di}{dt}\to\infty$)**时，** $\to u=\infty$　　**∴只要** $u\neq\infty$，i **就不会跃变。**

(4) **对**(*)**式积分，可把电感的电流** i **表示为电压** u **的函数**

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(x)dx=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u(x)dx+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(x)dx \qquad (**)$$

令： $i(0)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u(x)dx$，　　$i(0)$ **为初始电流**

$$i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(x)dx \qquad (\text{积分形式的 } VAR)$$

可见：L **元件的** $i(t)$ **不仅与** t **时刻的** $u(t)$ **有关，还与** u **的历史有关，故** L **为记忆元件。**

对式(**)**任选初始时刻** t_0**，则有：**

$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(x)dx \qquad (***)$$

3．磁场能量

电感线圈中有电流时，其周围即建立磁场，因此电感是一种能存储磁场能量的元件。

取 u、i **关联参考方向，则瞬时功率为：**

$$p_{吸}(t)=u(t)\times i(t)=Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

$p(t)$ **可正可负，** $p(t)$ **为正，表示电感从外电路吸收能量；**

$p(t)$ **为负，表示电感向外电路放出能量。**

从 t_0 **到** t **期间供给电感的能量为：**

$$W_L(t)=\int_{t_0}^{t}u(x)\times i(x)dx=\frac{1}{2}L[i^2(t)-i^2(t_0)]$$

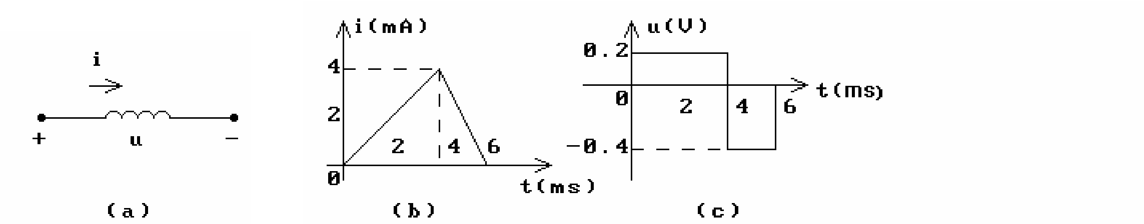
以上就是电感在(t_0，t)**期间获得的储能，若** $t_0=-\infty$，**则由于** $i(-\infty)=0$**，可知** t **时刻，电感的储能为：** $W_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)\geq 0$ **。∴电感在某一时刻的储能只与该时刻的电流值有关。**

可见： (1) L—— **无源元件；**

(2) L—— **储能元件，不耗能，** L **不会释放出比它所储能量还多得多的能量。**

以上我们介绍了 L 与 C，通过分析可知，某一时刻电感的储能只与该时刻的电流有关，某一时刻电容的储能只与该时刻的电压有关，电路的储能可用电感电流及电容电压来表明。我们把某一时刻的电感电流和电容电压称为该时刻的状态。初始时刻 t_0 的 $i_L(t_0)$ 和 $u_C(t_0)$ 称为电路的初始状态。(P. 99 画线部分)

例：有一电感元件，$L=0.2H$，在指定的参考方向下(如图 a)，通过的电流 i 的波形如图 b 所示，求电感元件中产生的自感电压 u 的波形，并计算在电流增大过程中电感元件从电源吸收的能量。



解：当 $0<t<4ms$ 时， $i=t$， $u=L\dfrac{di}{dt}=0.2V$

当 $4ms<t<6ms$ 时， $i=-2t+12$， $u=L\dfrac{di}{dt}=-0.4V$

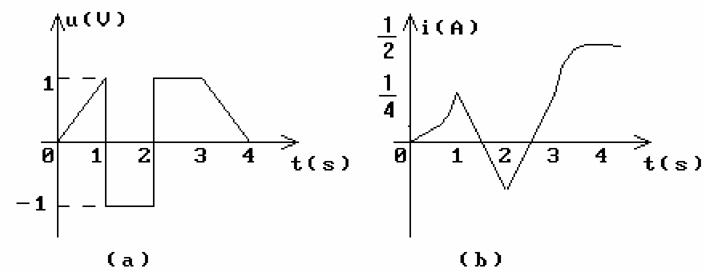
$u(t)$ 的波形如图 c 所示。

电流增大过程中电感元件吸取的能量等于 $i=4ms$ 时的磁场能：

$$\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}\times0.2\times(4\times10^{-3})^2J=1.6\times10^{-6}J=1.6mJ$$

$0\sim4ms$ 吸收　　　　　$4\text{ms}\sim6ms$ 释放

例：若 $2H$ 电感的电压波形如图(a)所示，试画出电流的波形。



解：本题涉及积分的问题，可以先用积分求出函数表达式再画波形。对图(a)所示 $u(t)$ 波形可分段写出函数式如下：

$$u(t)=\begin{cases}t(0\le t\le1)\\-1(1\le t\le2)\\1(2\le t\le3)\\4-t(3\le t\le4)\end{cases}$$

利用式(***)可分段计算 $i(t)$。

在 $0 \le t \le 1$ 期间： $i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t u(x)dx = 0+\frac{1}{2}\int_0^t t dx = \frac{t^2}{2}A$

$t=1$ 秒时， $i(1)=\frac{1}{4}A$

此间 $i(t)$ 波形为抛物线，从 0 增加到 $\frac{1}{4}A$，曲线向上凹。

在 $1 \le t \le 2$ 期间： $i(t)=i(1)+\frac{1}{L}\int_1^t u(x)dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_1^t (-1)\times dt = -\frac{t}{2}+\frac{3}{4}A$

$t=2$ 秒时， $i(2)=-\frac{1}{4}A$

此间 $i(t)$ 线性下降，由 $\frac{1}{4}A$ 降至 $-\frac{1}{4}A$。

在 $2 \le t \le 3$ 期间： $i(t)=i(2)+\frac{1}{L}\int_2^t u(x)dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_2^t dt = \frac{t}{2}+\frac{5}{4}A$

$t=3$ 秒时， $i(3)=\frac{1}{4}A$

在 $3 \le t \le 4$ 期间： $i(t)=i(3)+\frac{1}{L}\int_3^t u(x)dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_3^t (4-t)dt = -\frac{t^2}{4}+2t-\frac{7}{2}A$

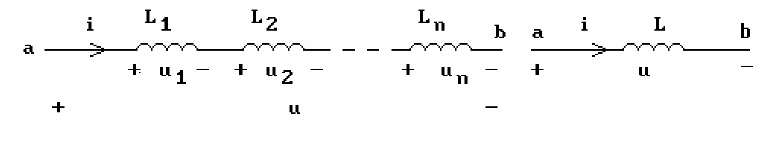
$t=4$ 秒时， $i(4)=\frac{1}{2}A$

此间 $i(t)$ 波形为按抛物线上升，曲线向下凹，从 $\frac{1}{4}A$ 增加到 $\frac{1}{2}A$。

在 $t>4$ 时， $u(t)$ 为零，因而 $i(t)=\frac{1}{2}A$。

根据以上分析结果画出 $i(t)$ 波形，如图 b 所示。

三、电感的串联



(a) (b)

与电阻串联一样，上图为电感串联电路，假设电压、电流参考方向关联，由电感元件的 VAR 可得：

$u_1 = L_1\frac{di}{dt}, u_2 = L_2\frac{di}{dt}, \cdots, \quad u_k = L_k\frac{di}{dt}, \cdots, \quad u_n = L_n\frac{di}{dt}$， 由 KVL 得：

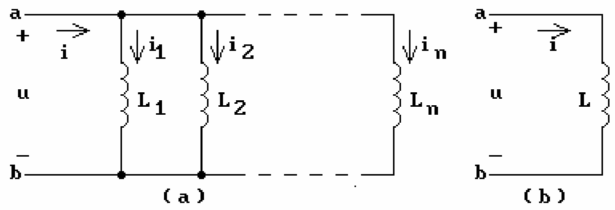
$$u = u_1+u_2+\cdots+u_k+\ \cdots+u_n$$
$$= L_1\frac{di}{dt}+L_2\frac{di}{dt}+\cdots+L_k\frac{di}{dt}+\cdots+L_n\frac{di}{dt}$$
$$= (L_1+L_2+\cdots+L_k\cdots+L_n)\frac{di}{dt}$$

所以，串联等效电感为： $L = L_1+L_2+\cdots+L_k+\cdots+L_n = \sum_{k=1}^{n} L_k$

任一电感上的电压为： $u_k(t)=\frac{L_k}{L}u(t)$， $k=1,2,\cdots,n$

式中：$L=\sum_{k=1}^{n}L_k$，$\frac{L_k}{L}$**称为分压系数**。

四、电感的并联



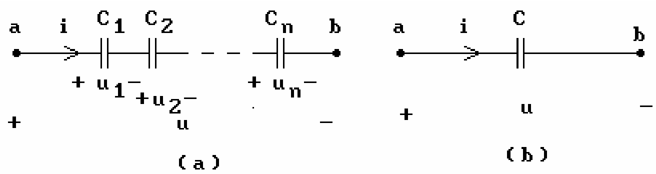
电感并联电路与其等效电感

由电感的 VAR **及电路的** KCL **不难得出电感并联的等效电感为**：

$\frac{1}{L}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k}$，**即：电感并联电路等效电感的倒数等于相并联各电感倒数之和**。

任一电感上的电流为：$i_k(t)=\frac{1}{L_k}\int_{-\infty}^{t}u(x)dx=\frac{L}{L_k}i(t)$**,式中** $k=1,2,\ldots,n$，**该式称为电感并联分流公式**，$\frac{L}{L_k}$**称为分流系数**，**上式表明电感并联分流符合反比关系**。

五、电容的串联



电容串联电路与其等效电容

上图为 n **个电容的串联电路**，**设电流**、**电压参考方向关联**。**根据电容元件的电压电流约束关系得**：

$$u_1(t)=\frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t}i(x)dx$$

$$u_2(t)=\frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t}i(x)dx$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$u_k(t)=\frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{t}i(x)dx$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$u_n(t)=\frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{t}i(x)dx$$

由 KVL **得电容串联电路总电压**：

$u(t)=u_1(t)+u_2(t)+\cdots+u_k(t)+\cdots+u_n(t)$

$$=\frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx \quad +\frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx+\cdots+\frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx+\cdots+\frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx$$

$$=(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_k}+\cdots+\frac{1}{C_n})\int_{-\infty}^{t} i(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx$$ **式中**： $\frac{1}{C}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$

C **是** n **个电容串联后的等效电容，它的倒数等于** n **个相串联电容倒数之和。**

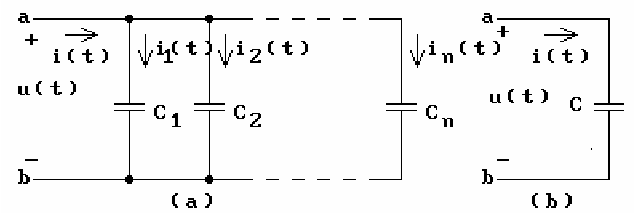
因流经各串联电容的电流是同一电流，有： $\int_{-\infty}^{t} i(x)dx=Cu(t)$

所以，相串联的电容 C_k **上的电压为：**

$$u_k(t)=\frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx=\frac{C}{C_k}u(t)$$

此式称为电容串联电路分压公式，其中 $\frac{C}{C_k}$ **称为分压系数，它说明电容串联电路分压与电容值** C_k **呈反比关系。**

六、电容的并联



电容并联电路与其等效电容

上图为 n **个电容的并联电路，由** KCL **及电容元件上的电流电压微分关系可的等效电容为：**

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_{k+}\cdots+C_n=\sum_{k=1}^{n}C_k$$

即：电容并联电路等效电容等于相并联的各电容之和。

相并联电容上的电压是同一电压，又 $\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}i(t)$ **，推得：**

相并联电容 C_k **上的电流为：** $i_k=C_k\frac{du}{dt}=\frac{C_k}{C}i(t)$ ， $k=1,2,\ldots,n$

式中 C **是并联后的等效总电容，上式称为电容并联分流公式，其中** $\frac{C_k}{C}$ **为分流系数，它表明电容并联电路分流与电容值** C_k **呈正比关系。**

七、*C* 和 *L* 的模型(自学)

作业：P. 121　 5－1、5－3

§5－2　一阶电路的瞬态分析

一、动态电路

1、**稳态**：

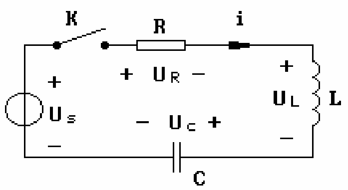
(1) **不随时间发生变化**；

(2) **周期性地变化，这一状态称为电路的稳定工作状态**。

2、**暂(瞬)态**：

含有动态元件的电路发生“换路”(或工作条件发生变化)，需经历一个稳态到另一个稳态的过渡，此过渡过程称为暂(瞬)态过程。

例：电路如图(a)**所示**：



(a)

当 K **合上之前**，$i=0$，$u_R=0$，**在某一时刻** t，**合上** K，**则由** KVL **有**：

$$u_R+u_L+u_C=u_s$$

即

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt=u_s$$

求导、整理：$RC\dfrac{di(t)}{dt}+LC\dfrac{di^2(t)}{dt^2}+i(t)=C\dfrac{du_s}{dt}$　～～～(**二阶微分方程**)

若将 L **短路，则有**：$RC\dfrac{di}{dt}+i=C\dfrac{du_s}{dt}$　～～～(**一阶微分方程**)

既然是微分方程，那么它们的解必然是随时间 t **而变，也就是说**，u_R、u_L、u_C **并不是直接达到最终的稳态(固定值)，而是要经历一段时间，我们把这种含** L、C **的电路称为动态电路，而将** L、C **元件称为动态元件**。

一般情况下，当电路中含有：

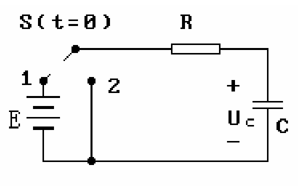
一个储能元件→描述为一阶微分方程 —— 一阶电路

二个储能元件→描述为二阶微分方程 —— 二阶电路

n **个储能元件→ 描述为** n **阶微分方程 ——** n **阶电路**

二、动态电路的特点

设有电路，如图(b)。**当** t<0，S **打在** 1，E **对** C **充电**，u_C↑＝E，**达到一种稳定状态**；S **在** t＝0 **时刻打到** 2，C **对外放电，直至放光**($u_C=0$)，**从而进入另一种稳定状态**。



(b)

这里，S **从** 1→2，**称之为换路，理解为瞬间**

完成。电路的接通或断开、电路参数或电源的突变均可理解为换路。

S 在 1 时，称为换路前，记为 $t=0_-$

S 在 2 时，称为换路后，记为 $t=0_+$

可以看到，S 从 1 打到 2 后，欲使 $u_C=0$，需要一定时间，这个过程就称为过渡过程或暂态过程。

同理：若 R 改为 R'，或 C 改为 C'，则参数改变后，也要有一过渡。

结论：当动态电路的结构或元件参数发生改变时，如电源或无源元件断开或接入，信号的突然注入等，电路将从一个稳定状态逐步过渡到另一个稳定状态，这中间的过程即是过渡过程。(P.102 画线)

三、初始条件

若有 n 阶微分方程：$a_1 f^{(n)}(t)+a_2 f^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}f\ (t)+a_n=b$

欲求 $f(t)$，必须事先知道：$f(0)$，$f'(0)$，$\cdots$，$f^{n-1}(0)$（即初始值）

对于动态电路：即为 $u(0_+)$，$i(0_+)$ 及其导数 $u^{n-1}(0_+)$，$i^{n-1}(0_+)$。

四、换路定理

1、电容

由 $u_c(t)=u_c(t_o)+\frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i_c(x)dx$，令：$t_o=0_-$，$t=0_+$

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_c(x)dx$$

只要 i_c 为有限值，必有：$\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_c(x)dx=0$

∴ $u_c(0_-)=u_c(0_+)$——换路定理一

即：在换路的一瞬间，电容上的电压不会跃变。

若 $u_c(0_-)=0$，则 $u_c(0_+)=0$，这一瞬间，C 被短路 $\Rightarrow u_c(t_{0-})=u_c(t_{0+})$

2、电感

有 $i_L(0_+)=i_L(0_-)$——换路定理二

即：在换路的一瞬间，电感上流动的电流不会跃变。

若 $i_L(0_-)=0$，则 $i_L(0_+)=0$，即在 $t=0_+$ 这一时刻，电感相当于开路。

$\Rightarrow \quad i_L(t_{0-})=i_L(t_{0+})$

五、初始值的求解

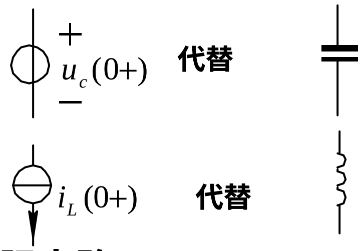
1、由 $t=0\_$ 的电路求 $u_c(0_-)$，$i_L(0_-)$

若 $t=0\_$ 时电路已达稳态，则 $\begin{cases} L & -- \text{ 短路} \\ C & -- \text{ 开路} \end{cases}$

于是，$0\_$ 电路 $\rightarrow$ $0\_$ 电阻电路

2、**由换路定律，得**$u_c(0_+)$，$i_L(0_+)$

相关初值用



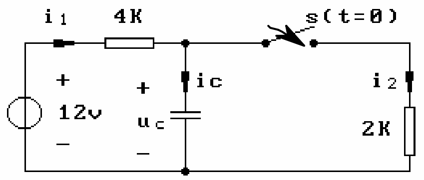
原电路 $\rightarrow$ $0+$**电阻电路。**

六、终值$r(\infty)$**的确定**

换路后，由$t\rightarrow\infty$**的终值稳态电路求**$r(\infty)$**，此时：**

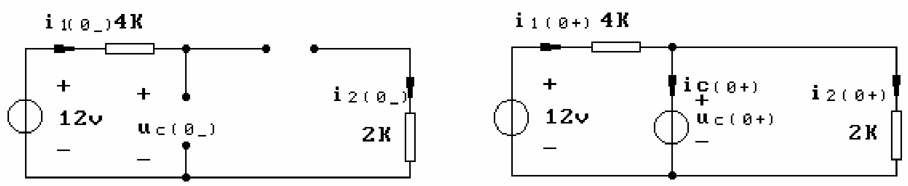
$\left\langle\begin{matrix} L & ----\ \text{短路} \\ C & ----\ \text{开路}\end{matrix}\right.$ Þ “∞**电路”为“**∞**电阻电路”**

例：$t=0$，**开关** S **合上，求：** $i_1(0_+)$、$i_C(0_+)$、$i_2(0_+)$、$u_c(0_+)$。



解：$t<0$，**电路已达稳态，**C **相当于开路，电路如图**(a)。

$\therefore\ u_c(0_-)=12V$



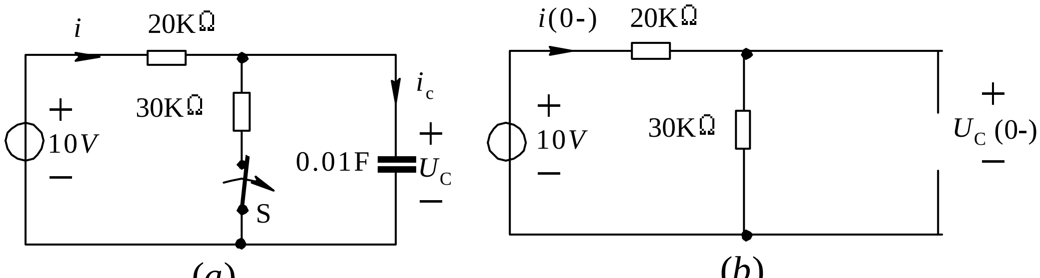
(a) (b)

由换路定律， $u_c(0_+)=u_c(0_-)=12V$ $\quad i_1(0_-)=0$，$i_2(0_-)=0$

$t>0$，$(t=0_+)$**时，用替代定理可得图**(b)**，以一电压源替代**$u_c(0_+)$

$\therefore\ i_1(0_+)=0$， $\quad i_2(0_+)=6mA$， $\quad i_C(0_+)=-6mA$

例：图示电路，$t<0$**时，**S**闭合，电路已达稳态，**$t=0$**时，**S**断开，试求：** $i(0+)$、$u(0+)$、$u_c(0+)$、$i_c(0+)$。



(a) (b)

解： 0_-**电路，**C **相当于开路，电路如图**(b)

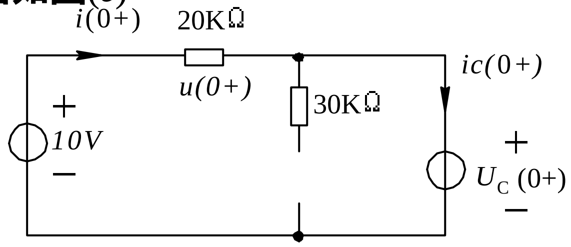
∴ 有：$u_c(0_-)=\dfrac{10}{20+30}\times 30=6V$　　　$i(0_-)=\dfrac{10}{20+30}=0.2mA$

$t=0$ 时，S 闭合，由换路定律：　　$u_c(0_+)=u_c(0_-)=6V$

0_+ 电路，C 用电压源代替，电路如图(c)

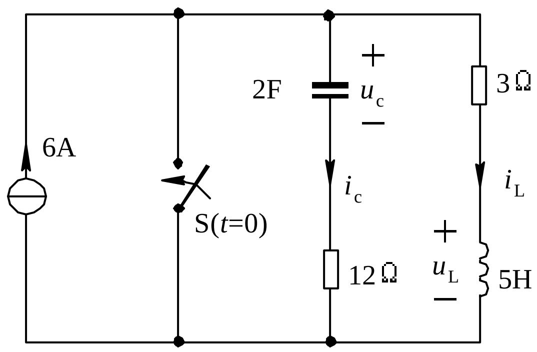
∴ $i(0+)=i_c(0_+)=\dfrac{10-u_c(0_+)}{20}=0.2mA$

$u(0+)=20\times i(0_+)=4V$

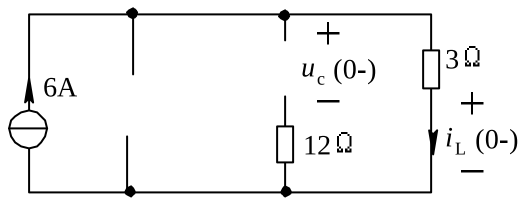


(c)

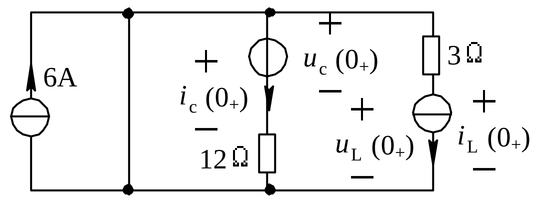
例：图示电路，$t<0$ 时，S 断开，电路已达稳态；$t=0$ 时，S 闭合。试求：$i_L(0_+)$、$u_L(0_+)$、$u_c(0_+)$、$i_c(0_+)$。



(a)



(b)



(c)

解：0_- 电路如图(b)所示，C 相当于开路，L 相当于短路

∴ $i_L(0_-)=6A$　　　$u_c(0_-)=3\times i_L(0_-)=18V$

$t=0$ 时，S 断开，由换路定律

$u_c(0_+)=u_c(0_-)=18V$　　　$i_L(0_+)=i_L(0_-)=6A$

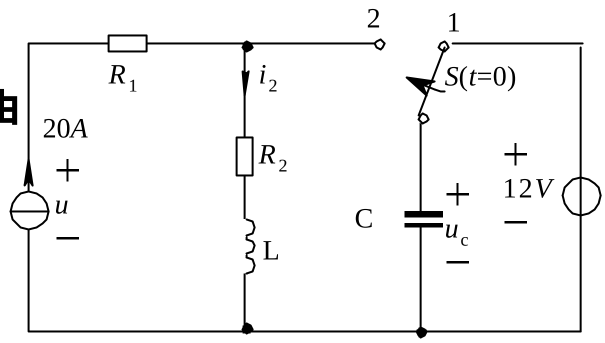
0_+ 电路，如图(c)所示：

有　　$i_c(0_+)=\dfrac{-u_c(0_+)}{12}=\dfrac{-18}{12}=-1.5A$

由 KVL：　　$3i_L(0_+)+u_L(0_+)=0$

∴ $u_L(0_+)=-3i_l(0_+)=-3\times 6=-18V$

例：图示电路，$t<0$ 时，S 打在“1”的位置，电路已达稳态，$t=0$ 时，S 由“1”打向“2”，$R_1=1.5\Omega$，$R_2=0.5\Omega$，$L=2H$，$C=2F$，试求：$i_2(0_+)$、$u_c(0_+)$、$u(0_+)$。

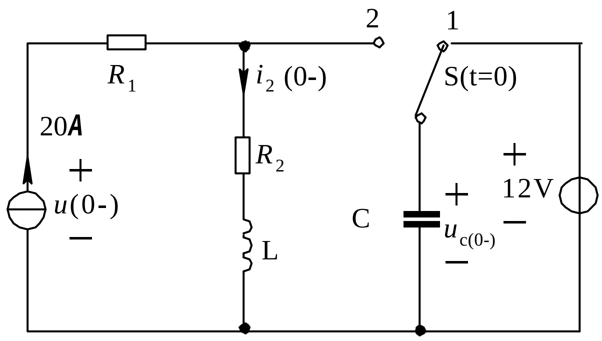


解：0_- **电路如右图所示**

有：$i_2(0_-)=20A$

$u_c(0_-)=12V$

$u(0_-)=20(R_1+R_2)=40V$



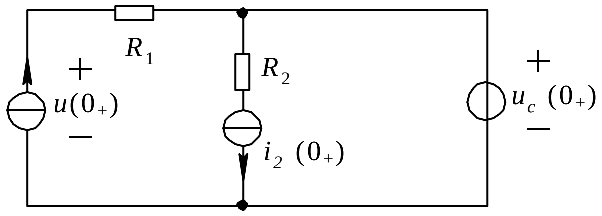
由换路定律：

$u_c(0_+)=u_c(0_-)=12V$

$i_2(0_+)=i_2(0_-)=20A$

0_+ **电路如图所示，有**：

$u(0_+)=u_c(0_+)+20R_1=42V$



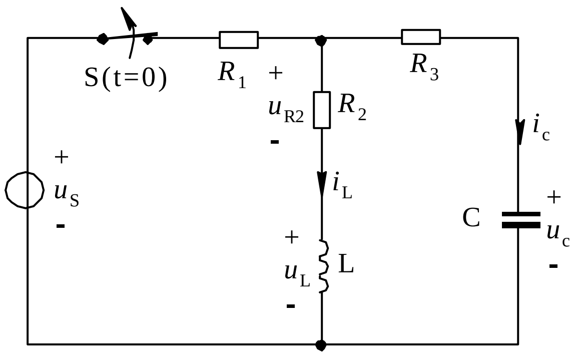
例：**图示电路如图**(a)，$U_s=50V$，$R_1=R_2=5\Omega$，$R_3=20\Omega$，$t<0$ **时**，S **闭合，电路已达稳态**，$t=0$ **时**，S **断开，试求**：$i_L(0_+)$、$u_c(0_+)$、$u_{R2}(0_+)$、$u_{R3}(0_+)$、$i_c(0_+)$、$u_L(0_+)$。

解：(1) **确定独立初始值** $u_c(0_+)$、$i_L(0_+)$。

0_- **电路如图**(b)**所示**，C **相当于开路**，L **相当于短路**

$\therefore\ i_L(0_-)=\dfrac{U_s}{R_1+R_2}=\dfrac{50}{5+5}=5A$

$u_c(0_-)=5\times i_L(0_-)=25V$

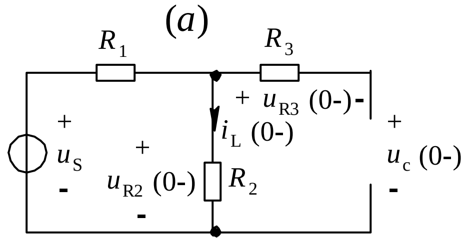


(a)

$t=0$ **时**，S **断开，由换路定律**

$u_c(0_+)=u_c(0_-)=25V$

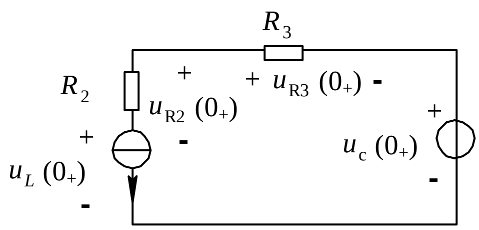
$i_L(0_+)=i_L(0_-)=5A$



(b)

(2) **计算相关初始值**，C、L **分别用等效电压源**$u_c(0_+)$**和等效电流源**$i_L(0_+)$**代替，得到**$t=0_+$**时刻的等效电路，如图**(c)**所示，**

有：



(c)

$u_{R2}(0_+)=R_2\times i_L(0_+)=5\times5=25V$

$i_c(0_+)=-i_L(0_+)=-5A$

$u_{R3}(0_+)=R_3\times i_c(0_+)=20\times(-5)=-100V$

$u_L(0_+)=-u_{R2}(0_+)+u_{R3}(0_+)+u_c(0_+)=-25+(-100)+25=-100V$

比较： $u_{R3}(0_-)=0$

$u_{R2}(0_-)=R_2\times i_L(0_-)=25V$

$u_L(0_-)=0$

七、一阶电路的零输入响应

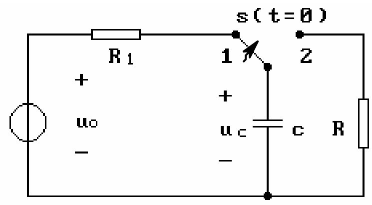
在动态电路中起激励作用的因素：

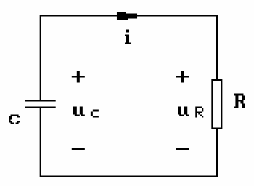
① **外施独立源，** L、C **无储能** $\rightarrow$ **零状态响应**

② L、C **初始有储能，无外加电源** $\rightarrow$ **零输入响应**

对于线性电路：零输入响应＋零状态响应＝全响应

1、RC 电路的零输入响应





t＝0 **时：** S **从** 1 **打到** 2**：有：** $u_c(0_+)=u_c(0_-)=u_o$

$$u_R(t)=u_c(t)=Ri \qquad \text{而} \qquad i=-C\frac{du_c}{dt}$$

由 KVL**：** $RC\dfrac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=0$ **（一阶齐次微分方程）**

又 $u_c(0_+)=u_c(0_-)=u_o$

特征方程 $RCp+1=0$ **得：** $p=-\dfrac{1}{RC}$ **(特征根)**

∴ $u_c(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

又 $u_c(0_+)=u_o \quad \rightarrow \quad A=u_c(0_+)=u_o$

∴ $u_c(t)=u_oe^{-\frac{1}{RC}t}$，$t\geq 0$

电流： $i(t)=-C\dfrac{du_c}{dt}=\dfrac{u_o}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}, t\geq 0$

$$u_R(t)=u_c(t)=Ri(t)=u_oe^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t\geq 0$$

可以看出 $u_c(t)$ **呈指数下降。令：** $RC=t$ **(称为时间常数，单位：秒)。理论上，** $t\rightarrow\infty$，$u_c(\infty)$＝0，C **放电完毕。**

t=0	$t=\tau$	t=2τ
$u_c=u_o$	u_c＝36.8%u_o	u_c＝13.5%u_o
t=3τ	t=4τ	t=5τ
u_c＝0.05u_o	u_c＝1.8%u_o	u_c＝0.07%u_o

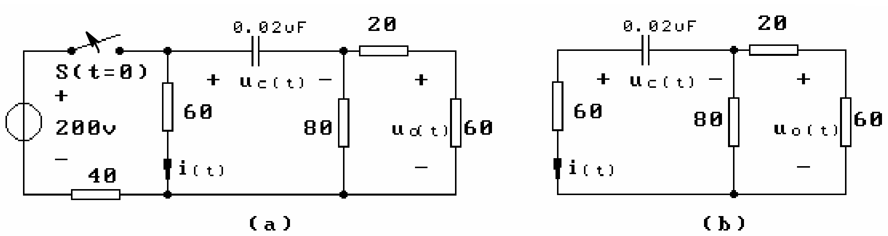
通常认为：t 经 3 τ～5 τ，C 放电完毕，过渡过程结束，电路进入新的稳定状态。时间常数等于特征根 P 倒数的负值；特征根 P 具有频率的量纲，故称为固有频率。 τ 越小，电压、电流衰减越快。

对 RC 电路：① 一个 RC 电路，仅有一个对应的 τ；

② $u_c(t)$、 $i(t)$ 的形式为 $Ae^{-\frac{1}{RC}t}$ 。

τ 如何求呢？关键是求 R 。

例：求图(a)电路中 $i(t)$、 $u_0(t)$。



解：0_- 电路，$0.02\,\mu F$ 电容开路。

$$u_c(0_-)=\frac{60}{40+60}\times 200=120V$$

$$u_c(0_+)=u_c(0_-)=120V$$

换路后：关键求 τ， $\tau=RC$，先求 R

求 C 两端的等效电阻： $R=60+\frac{80}{2}=100\Omega$

∴ $$t=RC=100\times 0.02\times 10^{-6}=2\times 10^{-6}\,s$$

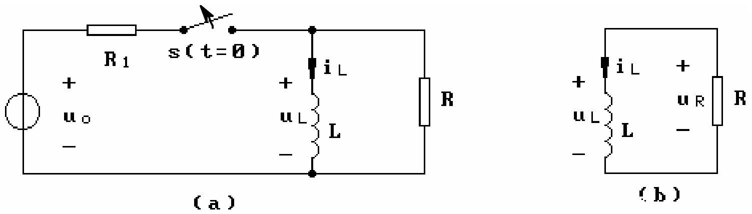
$$u_c(t)=120e^{-\frac{t}{2\times 10^{-6}}}=120e^{-5\times 10^5 t}\quad \text{V，t}\geq 0$$

由电容元件的 VAR：

$$i(t)=-C\frac{du_c(t)}{dt}=-0.02\times 120\times(-5\times 10^5)e^{-5\times 10^5 t}=1.2e^{-5\times 10^5 t}\quad \text{A，t}\geq 0$$

利用电阻并联的分流公式可求出 $u_0(t)$ (略)。

2．RL 电路的零输入响应



$t<0$ $\quad i_L(0_-)=\frac{U_o}{R_1}=I_o$

$t>0$ $\quad i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_o$

$t\geq 0$ 的电路如图 b： $u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$， $\quad u_R(t)=-Ri_L(t)$

由 KVL**：** $L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0$

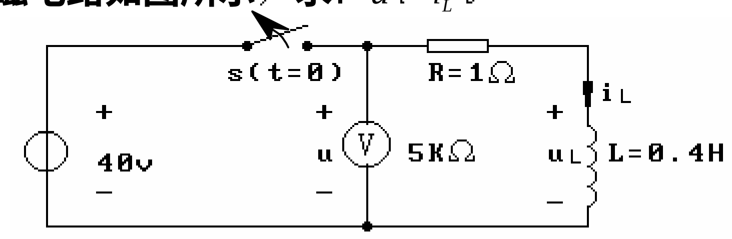
特征方程： $Lp+R=0 \Rightarrow p=-\frac{R}{L}$

∴ $i_L(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}$， **代入初值，得** $A=I_o$

故 $i_L(t)=I_o e^{-\frac{R}{L}t}$ A，$t\geq 0$

令： $\frac{L}{R}=\tau \rightarrow$ **时间常数 ，可利用** R **与** $L \rightarrow \tau$

例：励磁电路如图所示，求： u、i_L。



解： $i_L(0_+)=i_L(0_-)\approx 40A$

当 $t\geq 0$ **时，** $t=\frac{L}{R}=\frac{0.4}{5000+1}\approx 8\times 10^{-5}s$

∴ $i_L(t)=40e^{-\frac{t}{\tau}}=40e^{-\frac{t}{8\times 10^{-5}}}A$，$t\geq 0$

$u(t)\approx u_L(t)=-5000i_L(t)=-2\times 10^5 e^{-\frac{t}{\tau}}V$，$t\geq 0$

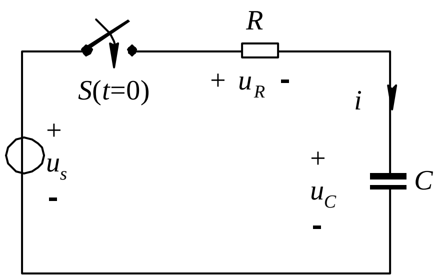
当 $t=0_+$， $|u|=200\ KV$

分析： Ⓥ**将被烧毁，若没有**Ⓥ， i_L **没有通路，将在开关上产生强大的电弧光，空气开关易被强大的电压击穿。**

八、一阶电路的零状态响应

零状态指： $u_c(0_+)=0$， $i_L(0_+)=0$。

1、RC 电路在 DC 激励下的零状态响应



图示电路中，在开关 S **闭合之前，电容未充电，即电路处于零初始状态，** $u_c(0_-)=0$。S **合上，** C **将被充电。**

$t\geq 0$ **时，由** KVL **得：** $u_R+u_c=u_s$

把 $u_R=Ri$、 $i=C\frac{du_c}{dt}$ **代入上式，得以** $u_c(t)$ **为变量的方程：**

$$RC\frac{du_c}{dt}+u_c=u_s \qquad (t\ge 0) \qquad (*)$$

这是一阶线性非齐次常微分方程，此类方程的解由两个分量组成

即： $u_c=u_c'+u_c''$

u_c' —— 非齐次微分方程式(*)的一个特解。在图中，开关 S 闭合很久后，电容已充电完毕，这时电容电压已趋稳定，即：

$$u_c'=u_c(\infty)=u_s \qquad \text{(作为特解)}$$

u_c'' —— 对应齐次微分方程式 $RC\frac{du_c}{dt}+u_c=0$ 的通解。

$$u_c''=Ae^{-\frac{1}{RC}t}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中：A —— 待定积分常数。

p —— $-\frac{1}{RC}$，为方程的特征根。

$t=RC$ —— 时间常数。

故： $u_c(t)=u_s+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

由 $u_c(0_+)=u_c(0_-)=0$，得： $A=-u_s$

$$\therefore \qquad u_c=u_s-u_se^{-\frac{t}{\tau}}=u_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\ V \qquad (t\ge 0)$$

u_c' —— 在直流或周期函数激励下的特解，一般取电路达到稳定状态的解作为特解(与激励形式相同)，故特解也称为稳态解或稳定分量。

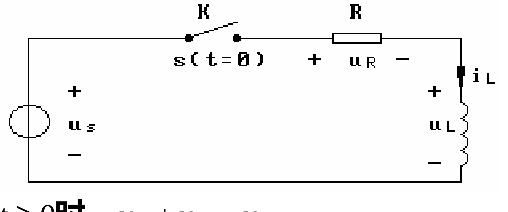
u_c'' —— 形式与输入激励无关，称为自由分量，与零输入响应具有相同的模式，通常它随着时间的推移而趋于零，也叫暂态解或暂态分量。

在图示电路参考方向下，

$$i(t)=C\frac{du_c}{dt}=\frac{u_s}{R}\times e^{-\frac{t}{\tau}}\ A \qquad (t\ge 0)$$

2. RL 电路在恒定输入的零状态响应

K 闭合之前，电感中无电流，电路处于零状态，$i_L(0_-)=0$；当 t=0，K 闭合，由 KVL：



$t\ge 0$时，$u_L+u_R=u_s$

$$L\frac{di_L}{dt}+u_R=u_s \qquad (t\ge 0) \qquad (**)$$

将 $u_L = L\frac{di_L}{dt}$， $u_R = Ri_L$ **代入式(**)**：

有： $$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = u_s \qquad (t \geq 0)$$

解之： $$i_L = i_L' + i_L''$$

稳态分量 $$i_L' = i_L(\infty) = \frac{u_s}{R}$$

暂态分量： $$i_L'' = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{u_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = \frac{u_s}{R} - \frac{u_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{u_s}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\ A \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = u_s e^{-\frac{t}{\tau}}\ V \qquad (t \geq 0)$$

例：P.110 **例** 5－5

作业：P.122 5－7、5－8、5－10、5－11、5－15。

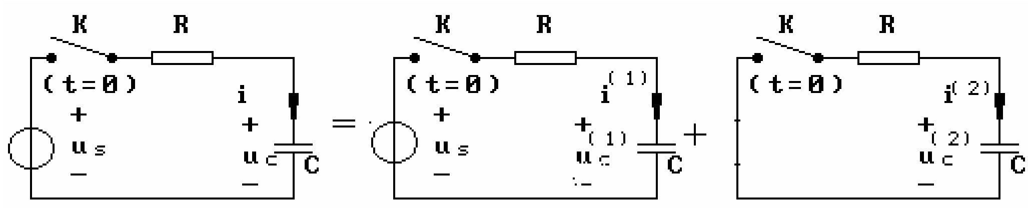
§5－3 一阶电路的全响应、三要素法

一、全响应

在非零初始状态和外部输入共同作用下的响应称为全响应。对线性电路，由叠加定理可知：

全响应＝零输入响应＋零状态响应

下面以 RC 电路为例进行讨论：



$u_c(0_+)=u_o$ $\quad$ $u_c(0_+)=0$ $\quad$ $u_c(0_+)=u_o$

(a) $\quad$ (b) $\quad$ (c)

$$u_c^{(1)}(t)=u_s(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (1)$$

$$u_c^{(2)}(t)=u_o e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (2)$$

由叠加定理：

$$u_c(t)=u_s(1-e^{-\frac{t}{RC}})+u_o e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (*)$$

零状态 $\quad$ 零输入

$$=(u_o-u_s)e^{-\frac{t}{RC}}+u_s$$

暂态响应 $\quad$ 稳态响应

自由分量 $\quad$ 强制分量

$$i(t)=i^{(1)}(t)+i^{(2)}(t)=\frac{u_s}{R}e^{-\frac{t}{RC}}-\frac{u_o}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (**)$$

从上面的分析，可以得到：

全响应＝稳态分量＋暂态分量

全响应＝强制分量＋自由分量

$$u_c(t)=\underbrace{(u_o-u_s)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{暂态分量（响应）}}+\underbrace{u_s}_{\text{稳态分量（响应）}}$$

在实际问题中，往往并不要求算出全响应的分量，可以通过某种途径直接写出结果，即三要素法。

二、三要素法

一阶电路的微分方程为： $a\dfrac{df(t)}{dt}+bf(t)=g(t)$

上式为一阶常系数微分方程，a、b 为常数，$g(t)$ 则取决于激励源，其通解表达式为：

$$f(t)=f_{特}(t)+Ae^{pt} \qquad (t\ge 0)$$

当 $t=0_+$ **时**：$\qquad f(0_+)=f_{特}(0_+)+A$

∴ $\qquad A=f(0_+)-f_{特}(0_+)$

∴ **全响应**：$\qquad f(t)=f_{特}(t)+[f(0_+)-f_{特}(0_+)]e^{pt}$

$f_{特}(t)$ **一般是可以通过换路后达到新稳定状态时的电路(终值电路)来求解，即** $f_{特}(t)=f_{新稳}(t)$。**若激励为直流，则此特解为一常数。(直流稳态响应)。**

∵ **当** $t\to\infty$ **时电路才进入稳定状态，**

∴ $f_{特}(t)=f(\infty)$， $\qquad f_{特}(0_+)=f(\infty)$

∴ $$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{pt}$$

式中：$f(\infty)$、$f(0_+)$、$p=-\dfrac{1}{\hat{o}}$ **称为三要素。**

(1) $p=-\dfrac{1}{t}$ **通过换路后的电路结构求得**：$t_c=RC$、$t_L=\dfrac{L}{R}$；

(2) $f(0_+)$ **通过换路定理和** 0_+ **等效电路来求**；

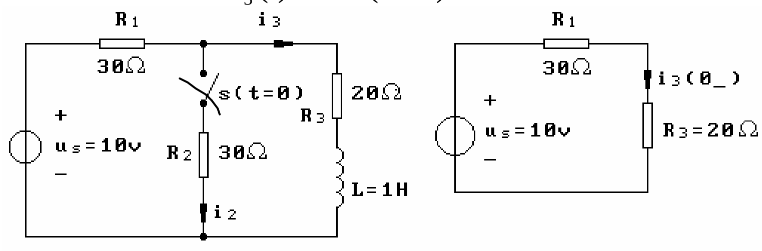
(3) $f(\infty)$ **可通过换路后，** $t=\infty$ **达到新的稳态电路来求。此时，** C **开路，** L **短路。**

例如：$$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad V$$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad A$$

举例说明方法、步骤。

例：图示电路，求：$i_3(t)=?\quad (t\ge 0)$。



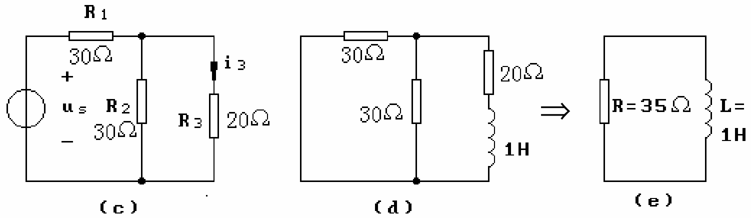
(a) (b)

解：$t=0_-$ **时，电路如图**(*b*)**所示。**

有：$i_3(0_-)=\dfrac{10}{20+30}=0.2A$

由换路定律 $\qquad i_3(0_+)=i_3(0_-)=0.2A$

换路后的稳定状态($t\to\infty$)**，电路如图**(*c*)**所示。**



(c) (d) (e)

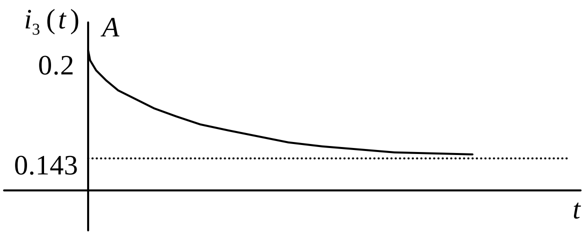
有：$i_3(\infty)=\dfrac{u_s}{R_1+\dfrac{R_2\times R_3}{R_2+R_3}}\times\dfrac{R_2}{R_2+R_3}=0.143A$ （**用分流公式**）

以下求 τ：**换路后的电路**（**令电压源**u_s**短路，即除源**），**电路如图**（d）**所示**：

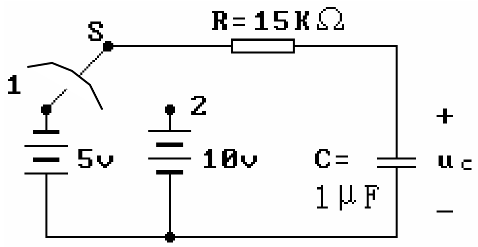
∴ $$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{35}s$$

$$i_3(t)=i_3(\infty)+[i_3(0_+)-i_3(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=0.143+(0.2-0.143)\,e^{-35t}$$
$$=0.143+0.057\mathrm{e}^{-35\mathrm{t}}\quad A\quad(t\ge 0)$$

下面画出波形；



例：**开关** S **在**$t=0$**时由** $1\to 2$，$t=10ms$**时**，**再从** $2\to 1$。**试求**$u_c(t)$，**并画出波形**。



解：**分段讨论**：（**用三要素法**）

① $0<t$，S **在** 1，**电路处于稳态** $u_c(0_-)=-5V$

② $0<t<10ms$，S **从** $1\to 2$，**这时**

$u_c(0_+)=u_c(0_-)=-5V$，$u_c(\infty)=10V$

$\tau=RC=15\times10^3\times1\times10^{-6}=15ms$

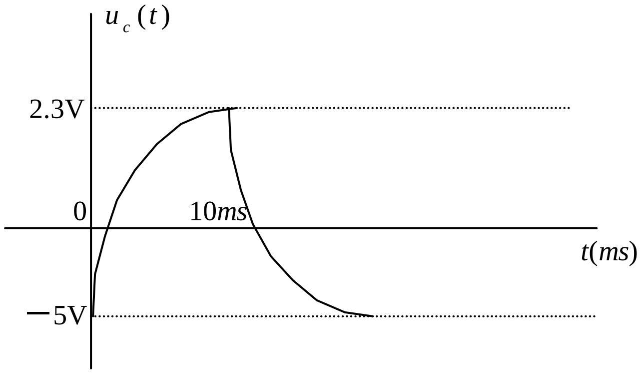
∴ $$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=10+(-5-10)e^{-\frac{t}{15ms}}$$
$$=10-15e^{-\frac{t}{15ms}}\quad V,\qquad 0<t<10ms$$

③ $t\ge 10ms$，S **从** $2\to 1$，**这时**

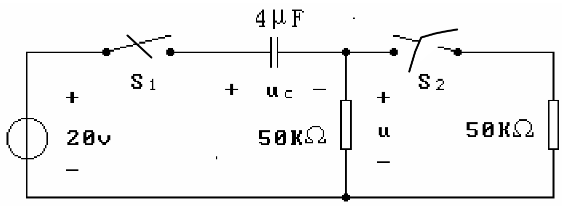
$$u_c(10ms_+)=u_c(10ms_-)=10-15e^{-\frac{10ms}{15ms}}=2.3V$$
$$u_c(\infty)=-5V$$
$$\tau=RC=15\times10^3\times1\times10^{-6}=15ms$$

故 $$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(10ms_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t-10ms}{15ms}}$$
$$=-5+7.3e^{-\frac{t-10ms}{15ms}}\ V \quad (t\geq 10ms)$$

波形如下：



例：图中$t=0$**时，** S_1**闭合，在**$t=0.1s$**时，闭合**S_2**。求**S_2**闭合后的电压**$u(t)$**的表达式。**



解： $t<0$， $u_c(0_-)=0$，

$0<t<0.1s$， $u_c(0_+)=u_c(0_-)=0$，

$u_c(\infty)=20V$

$\tau=4\mu F\times 50K\Omega=0.2s$

∴ $$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=20-20e^{-5t}\ V$$ **(也可直接用零状态响应公式写出)**

$t\geq 0.1s$， $u_c(0.1s_+)=u_c(0.1s_-)=20-20e^{-5\times 0.1}=7.87V$

$u_c(\infty)=20V$

$$\tau=\frac{50K\Omega}{2}\times 4\mu F=0.1s$$

故： $$u_c(t)=20+(7.87-20)e^{-\frac{t-0.1}{0.1}}=20-12.13e^{-10(t-0.1)}\ \text{V}$$

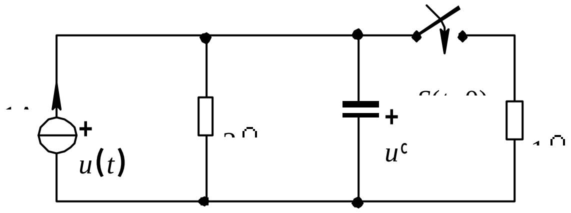
$$u(t)=i(t)\times 50\times 10^3=\frac{C\dfrac{du_c(t)}{dt}}{2}\times 50\times 10^3$$

$$=25\times 10^3\times C\frac{du_c}{dt}$$

$$=25\times 10^3\times 4\times 10^{-6}\times(-12.3)\times(-10)e^{-10(t-0.1)}$$

$$=12.13e^{-10(t-0.1)}\ V \qquad t\geq 0.1\text{s}$$

例：图示电路，$t<0$时开关打开已久，在$t=0$时开关闭合。求：$u(t)$。



解：由换路定律求电压$u(t)$的初始值$u(0_+)$。

$$u(0_+)=u_c(0_+)=u_c(0_-)=2\times1=2V$$

换路后电压$u(t)$的稳态分量 $u(\infty)=1\times\frac{2\times1}{2+1}=\frac{2}{3}V$

换路后电路的时间常数$t=RC$，R为电容元件所接二端网络除源后的等效电阻，它相当于2Ω和1Ω电阻并联，所以：

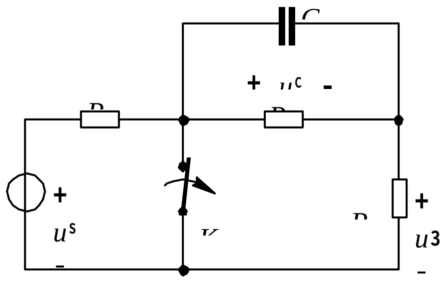
$$t=\frac{2\times1}{2+1}\times300\times10^{-6}s=2\times10^{-4}s$$

$$u(t)=u(\infty)+[u(0_+)-u(\infty)]e^{-\frac{t}{i}}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}e^{-0.5\times10^4t}\quad V\quad t\geq0$$

例：图示电路，已知$U_s=12V$，$R_1=R_2=R_3=3k\Omega$，

。 时，开关K打开，经 后又合上。求 、 。



解：1、 $0 £ t < t_1$， K断开

(1) 初始值：

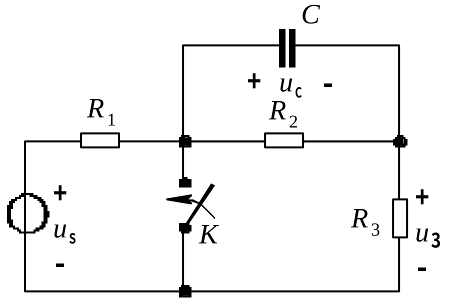
在 时刻电容相当于短路，所以 应由 与 分压确定，即

(2) 稳态分量：电路达到稳态时，C相当于开路，此时 、 可由 、 、 串联分压确定。

(3) **时间常数**

，

2．**在** **时，** K **又合上的情况。**



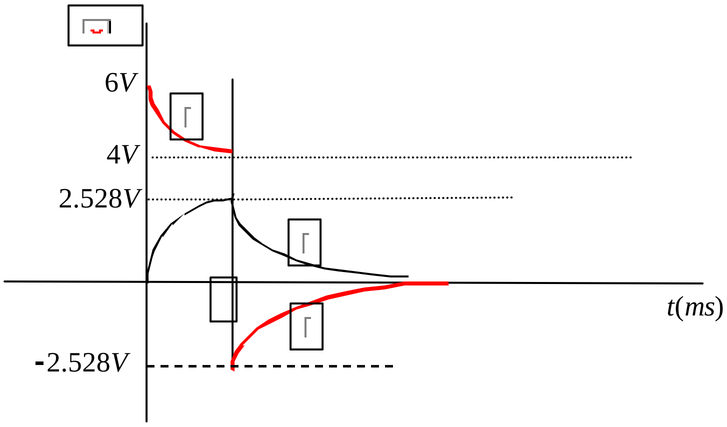
(1) **初始值：**

(2) **稳态分量：当　　时，　　、　　支路被短路，**

，

(3) **时间常数** **：**

、 **波形如下：**



作业： P. 123　5-12 、5-13 、5-14。

§5—4 阶跃函数和阶跃响应

一、阶跃函数

1、**单位阶跃函数　　的定义：**

1

0

如上图，在　　处不连续。　　　　　　　　**单位阶跃函数**

上述函数的电路模型：表示 $1V$ **直流电压源在　　时接入电路，在此之前该电路一直处于输入短路状态，如下图所示。**

2、**延迟阶跃函数**

1

0　　t_0

3、　　　　：**表示在　　区间内即为原函数，　　区间恒为零。**

同理：

0　　　　　　　　t　　　　0　　　　　　　　t

由此可以看出，阶跃函数　　可以表示电路的激励和响应。如 RC **零状态响应电路中：**

电路的激励：

电路的响应：

例：用阶跃函数表示以下图中所示波形。

解：

解：

解：

解：

二、阶跃函数在一阶电路中的应用

例：

1．若 ，即相当于在

时 S 合上， 。

故：

2．若 ，即相当于在 ，S 合上， 。

故：

说明由时不变电路的性质得到： 作用下，响应为 ；则

作用下，响应为 。

例：开关 S 在 时由 $1\rightarrow2$， 时，由又 $2\rightarrow1$。试求 ，并画出波形。

例：

解：

∵ 时，

∴ 当 时，

因此：当 ，

当 ，

当 ，

波形如右下图：

作业：P. 124 5-17、5－18。

§6—1 二阶电路的零输入响应和全响应

电路中含有两个动态元件的电路需用二阶微分方程来描述，故称为二阶电路。二阶电路的分析仍然是采用由 *KVL*、*KCL* 及 *VAR* 建立方程再求解的方法。分析线性二阶电路的问题也就是求解二阶线性常微分方程的问题。

本节以 *RLC* 串联电路的零输入响应为例分析二阶电路。如下图所示。

$+u_L$ -　$+u_R$ -

i　L　R

+　+

U_s　C　u_C

-　-

对于每一个元件，由 *VAR* 得：

(a)

(b)

(c)

由 *KVL*：　(1)

这是一个二阶线性常系数微分方程。为了求出未知量　，必须知道两个初始条件，即　及　。

其中：

即：　(电容的初始状态)、　(电感的初始状态)为此方程的两个初始条件。

对于零输入响应，即　时电路的响应，式(1)变为：

(2)

由微分方程理论可知，这一齐次方程解答的形式将视为特征根的性质而定，式(2)的特征方程为：　(3)

解之：

(此式对换路、除源 RLC 串联电路的任何响应变量均适用，故今后对这类电路可不必再列方程)

即特征根，称为电路的固有频率，由于 R、L、C 数值不同，和 有三种情况出现：

1、当 时， 和 为不相等的负实数；

2、当 时， 和 为两相等的负实数；

3、当 时， 和 为一对共扼复数，实部为负数。

下面分别讨论这三种情况下 RLC 电路的零输入响应形式。

一、RLC 串联电路的零输入响应——过阻尼情况

$+u_L$ - $+u_R$ -

i L R

\+ C u_C -

零输入情况下 RLC 串联电路如上图所示，初始状态 ， 已知。当 ，即 时，固有频率(特征根)为不相等的负实数。

所以： (4)

其中 和 由初始条件确定，方法如下：

；

∴

因 和 为不相等的负实数，可令：

这样 、 为两正实数。

， (*)

由 ， 得：

, (**)

可见，不论是　还是　都是由随时间衰减的指数函数项来表示的，这说明电路响应是非振荡性的。

当 R 较大，符合　，响应便为非振荡，称为过阻尼情况。

例：图示电路，　，　，　，　，　，

时，　，试求　及　。

$+u_L$ -　$+u_R$ -

i　L　R

+　+

U_s　C　u_c

-　-

解：电路微分方程：

特征方程：

得：　，

由

得：

从而有：　，

∴　V

A

当然，　及　可直接由式(*)、(**)写出。

响应曲线可定性做出：P.128 图 6－3

讨论：由 ，且

又 ： 由

…

，

能量过程：

		当 *R*“较大”，*L* 释能时还不能再使 *C* 充电，这时电路响应不形成振荡。

由曲线可看出当 ，∵ 即电容电压变化率为正，电容电压上升；当 ， 达最大，当 时， 下降， 和 的零输入响应都从初始值开始，最后趋于零。

二、*RLC* 串联电路的零输入响应——临界阻尼情况

在上题图中，如果 ，即 时，固有频率(特征根)为相等的负实数，即：

齐次方程的解可表示为：

常数 和 由初始条件确定，方法如下：

，

∴

∴ ， (5)

， (6)

从式(5)、(6)可见,电路响应仍为非振荡的。若 稍减小一点,以致

，则响应将为振荡的(下面讲述)。因此，当符合　　　时，响应处于临界振荡状态,称为临界阻尼状态情况。

三、RLC 串联电路的零输入响应——欠阻尼情况

当　　　　　，即：　　　时：

固有频率(特征根)为共轭复数，可表示为：

其中，

在这种情况下：

下面来确定　和　：

，

∴

可得：　(7)

其中：

式(7)说明　是衰减振荡，如图 6－6 所示，它的振幅　是随时间作为指数衰减的。　为衰减系数，　越大，衰减越快；　是衰减振荡的角频率，　越大，振荡周期越小，振荡加快。

综上所述，RLC 电路零输入响应的性质取决于电路的固有频率 p，p 可以是复数、实数或虚数，从而决定了响应为衰减振荡过程，非振荡过程或等幅振荡过程。在网络理论中，p 是一个重要的概念。

四、直流RLC 串联电路的完全响应

$+u_L$ -　$+u_R$ -

i　L　R

+　+

U_s　C　u_C

-　-

KVL：

(8)

这是一个二阶非齐次常系数常微分方程，解为：

根据特征根的三种不同情况，　　有三种形式，相应的完全解形式为：

1、**当　　，在过阻尼情况下：**

， (a)

2、**当　　，在临界阻尼情况下：**

， (b)

3、**当　　，在欠阻尼情况下：**

， (c)

和　可由初始值确定。

例：P.134　**例** 6－6

五、直流 *GLC* 并联电路的完全响应

GLC **并联电路是另一种简单的二阶电路，如图所示：**

$i_C(t)$　$i_G(t)$　$i_L(t)$

$i_S(t)$　+ $u(t)$ -　C　R　L

由 *KCL*：

，　　**代入上式**

得：

解这个非齐次二阶微分方程可求得　：

，……，P.136 **式** 6－34(**略**)

例：已知电感、电容无初始储能，t=0 时，开关由 1 打向 2，求：

、 。

S(t=0)

2

I_S =0.1A 1

400Ω

i_L

0.1H 0.2 F

+

u_c

-

解： KVL：

KCL：

得： (1)

而： (特解， ，L 短路，C 开路)

又 ， ，可得到 0_+电路，L 相当于开路，C 相当于短路。

所以有： ， ，

式(1) 对应齐次方程对应的特征方程为：

有特征根：

所以：

代入 、 得：

解之： ，

故： ，

同理：

得：

，

作业：P.137　6－2

一阶动态电路例题

例：有一纯电阻网络 N，接成图(a)时，测得 ；接成图(b)时，测得 。如接成图(c)时，并已知 ， ， ，试以求 时的 和 。

解：由图(a)和(b)可知电阻网络 N(包括电源 10V 在内)的开路电压为 $6V$，短路电流为 $5mA$，并由此求出等效有源二端网络的等效电阻 ，即：

图(c)的戴维南等效电路如图(d)所示。用三要素法计算。

(1)确定初始值：

(2)确定稳态值：

(3)确定时间常数：

于是得：

(d)

例：如图电路， 时开关 S 闭合，已知 ，受控源的控制系数为 g。

(1) 若 ，求电容电压 ；

(2) 若 ，求 。

(3) 分析、判断电路的工作情况。

解：这里只求电容电压 ，我们将除电容以外部分的电路看作是一端

口电路，求出它的戴维南等效电路。

设端口处电流 i，如图(a)所示，求出其伏安特性。由下图(a)，根据 KVL 有：

根据上式可作戴维南等效电路，如图(b)所示。

(1) 当　　　　　　时，　　　　　　　　　。不难求得：

由已知　　　　　　　，按三要素法写出电路的响应：

电路及其波形如下图：

(2) 当　　　　时，　　　　　　　　　　。不难求得：

由已知 ，**按三要素法写出电路的响应**：

电路及其波形如下图：

由上图(b)**可见**，**电压** **随着** **的增加而无限增高**，**这在实际电路中是不可能的**，**因为实际元件通常只在一定的工作电压**(**或电流**)**的范围内才能看作是线性的**，**超出一定范围**，**将受到元件非线性特性的限制**，**甚至使元件损坏**，**电路不能正常工作**。

例：P.123　5－10（**先画出关于电容** C **的戴维南等效电路**）

例：P.123　5－11（**先画出关于电容** C **的戴维南等效电路**）

例：P.124　5－18