机电一体化系统设计

第六章　控制系统模型

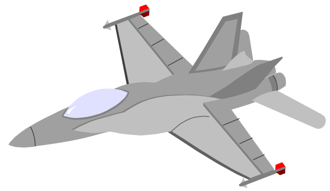
6.1 数学模型

数学模型是描述系统输入和输出之间关系的方程。

系统可以由一系列的单元块组成,每一个单元块有一个属性函数。

通过使用单元块的不同组成方式建立各种系统， 系统输入和输出的关系可以通过适当的方法组合单元块的关系获得。

从现实对象到数学模型



我们常见的模型

机床、机器人、飞机、火箭模型……	实物模型
水箱中的舰艇、风洞中的飞机……	物理模型
地图、电路图、分子结构图……	符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物

模型集中反映了原型中人们需要的那一部分特征

数学模型和数学建模

数学模型

对于一个现实对象，为了一个特定目的，

根据其内在规律，作出必要的简化假设，

运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。

数学建模

建立数学模型的全过程

（包括表述、求解、解释、检验等）

数学建模的重要意义

- 电子计算机的出现及飞速发展；
- 数学以空前的广度和深度向一切领域渗透。

数学建模作为用数学方法解决实际问题的第一步，越来越受到人们的重视。

- 在一般工程技术领域数学建模仍然大有用武之地；
- 在高新技术领域数学建模几乎是必不可少的工具；

数学建模的具体应用

- 分析与设计
- 预报与决策
- 控制与优化
- 规划与管理

如虎添翼

数学建模

计算机技术

知识经济

数学建模的方法和步骤

数学建模的基本方法

- **•机理分析** 根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律

- **•测试分析** 将对象看作“黑箱”,通过对量测数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型

- **•二者结合** 用机理分析建立模型结构，用测试分析确定模型参数

机理分析没有统一的方法，主要通过实例研究来学习。以下建模主要指机理分析。

数学建模的一般步骤

```
模型准备 → 模型假设 → 模型构成
              ⇡(虚线)        ↓
模型检验 ← 模型分析 ← 模型求解
   ↓
模型应用
```

模型准备

了解实际背景　　明确建模目的

搜集有关信息　　掌握对象特征

形成一个比较清晰的‘问题’

数学建模的一般步骤

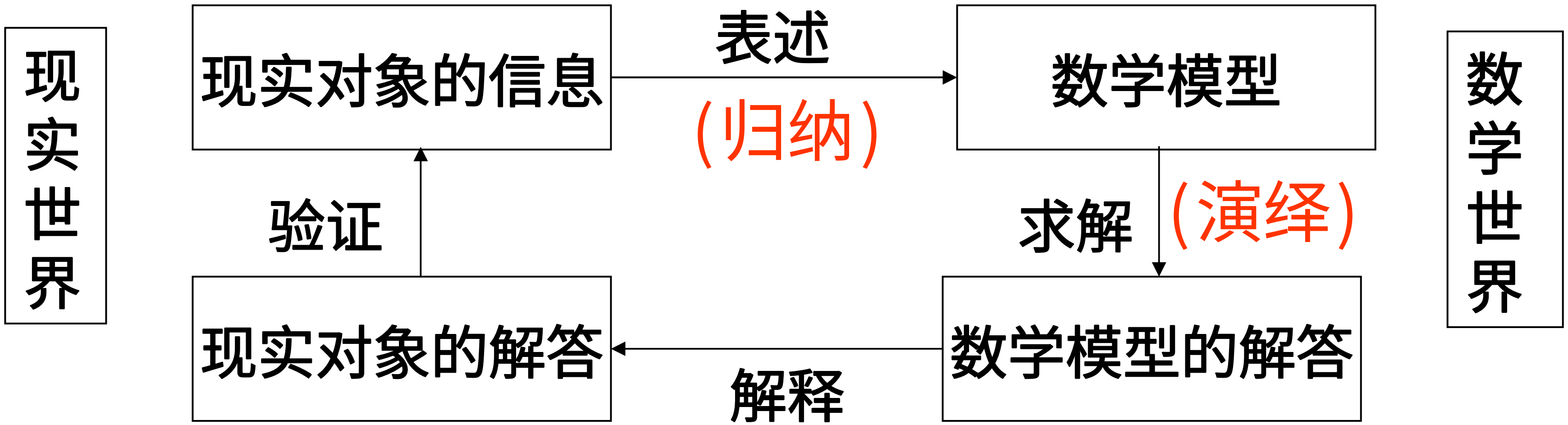
模型求解　各种数学方法、软件和计算机技术

模型分析　如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的稳定性分析

模型检验　与实际现象、数据比较，检验模型的合理性、适用性

模型应用

数学建模的全过程



表述 根据建模目的和信息将实际问题“翻译”成数学问题

求解 选择适当的数学方法求得数学模型的解答

解释 将数学语言表述的解答“翻译”回实际对象

验证 用现实对象的信息检验得到的解答

实践 ⇨ 理论 ⇨ 实践

机械系统

- 建立单元块模型的特点
  - 质量-阻尼-弹簧
  - 力作为输入
  - 位移作为输出
- 处理方法
  - 集中参数
  - 分布式或连续模型

弹　簧
—系统的刚度

- 线性

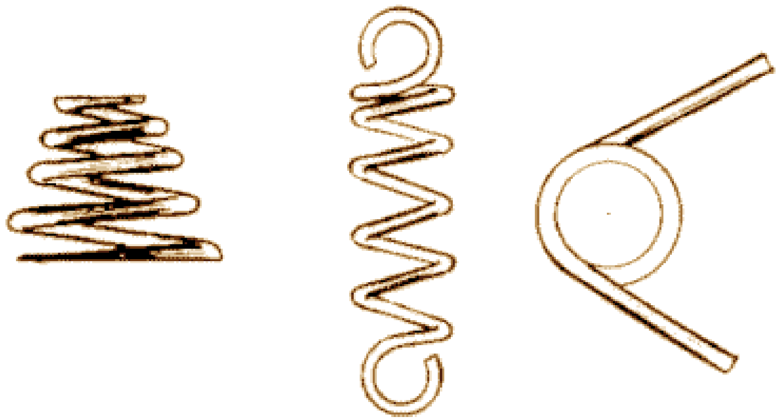
$$\boxed{F = kx} \qquad \boxed{T = k\theta}$$

- 非线性

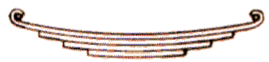
$$\boxed{F = f(x)}$$

$$\boxed{T = f(\theta)}$$

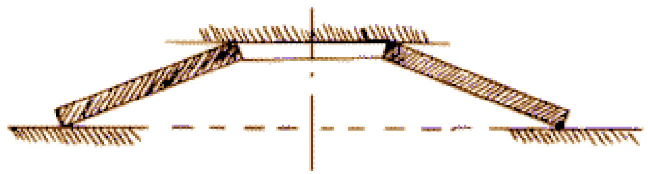
压力　拉力　扭矩



叠层板簧

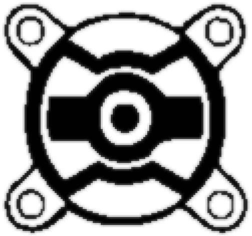


盘形弹簧垫圈



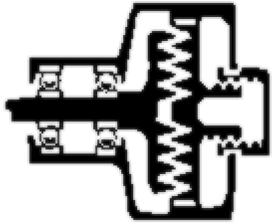
阻尼器、缓冲器、减震器
—阻尼或摩擦

- 阻尼器
  - 线性

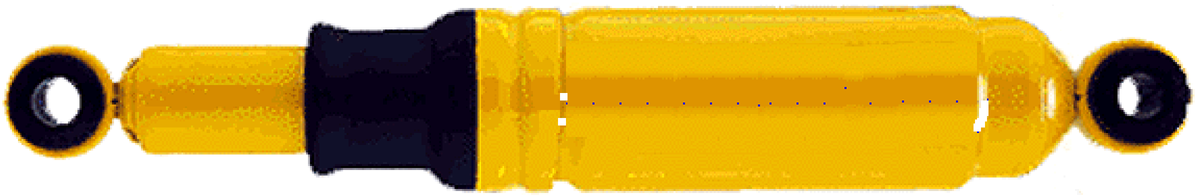


$$F = cv \quad or \quad F = c\frac{dx}{dt}$$

$$F = c\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



  - 非线性



$$F = cf(v) \quad or \quad F = c\frac{d(f(x))}{dt}$$

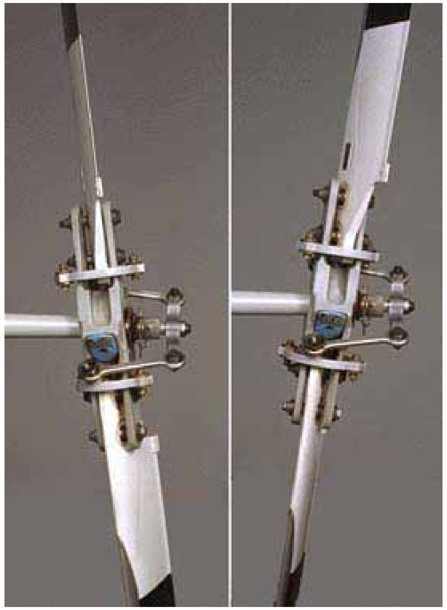
$$F = cf(\omega) \quad or \quad F = c\frac{d(f(\theta))}{dt}$$

质量

- 集中质量

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

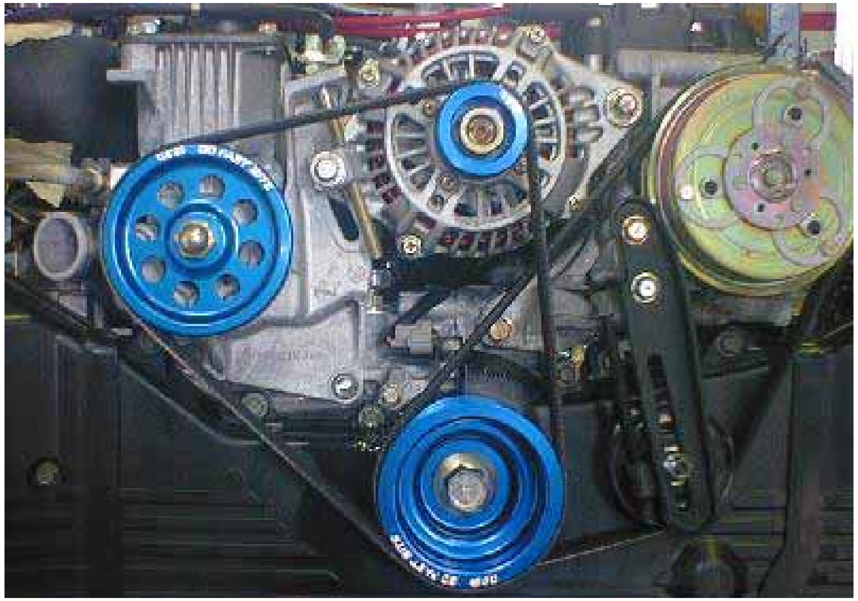
- 分布质量



转动惯量

- 集中惯量
- 分布式惯量

$$T = Ia = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = m\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



能量处理方法

- 能源存储或恢复
- 能量耗散

对于线性系统

机械系统的组成单元

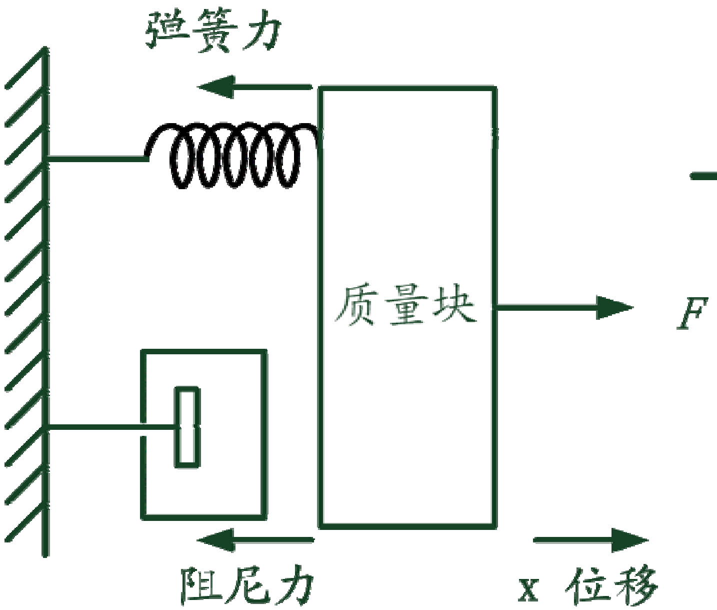
组成单元	方程描述	能量储存或能量的耗散
弹簧	$F = kx$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$
阻尼	$F = c\frac{dx}{dt}$	$P = cv^2$
质量块	$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$
转动弹簧	$T = k\theta$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$
转动阻尼	$F = c\frac{d\theta}{dt}$	$P = c\omega^2$
惯性矩	$F = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$

机械模型建立

- 净力作用于质量
- 每个质量块自由体受力图
- 净力等于

$\boxed{ma}$

- 简单质量-阻尼-弹簧
- 更复杂
- 多个质量块
- 有限元分析



弹簧-阻尼-质量块

自由个体受力图

$$F - kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx$$

这是一个二阶微分方程.

电气模型

- 电阻

$$v = iR \quad v = \frac{q}{C} \quad v = \frac{di}{dt}L$$

- 电容

$$v = iR \quad v = \frac{\int i\,dt}{C} \quad v = \frac{di}{dt}L$$

- 电感

$$i = \frac{v}{R} \quad i = C\frac{dv}{dt} \quad i = \frac{1}{L}\int v\,dt$$

- 电感储存的能量：

$$E = \frac{1}{2} L i^2$$

- 电容储存的能量：

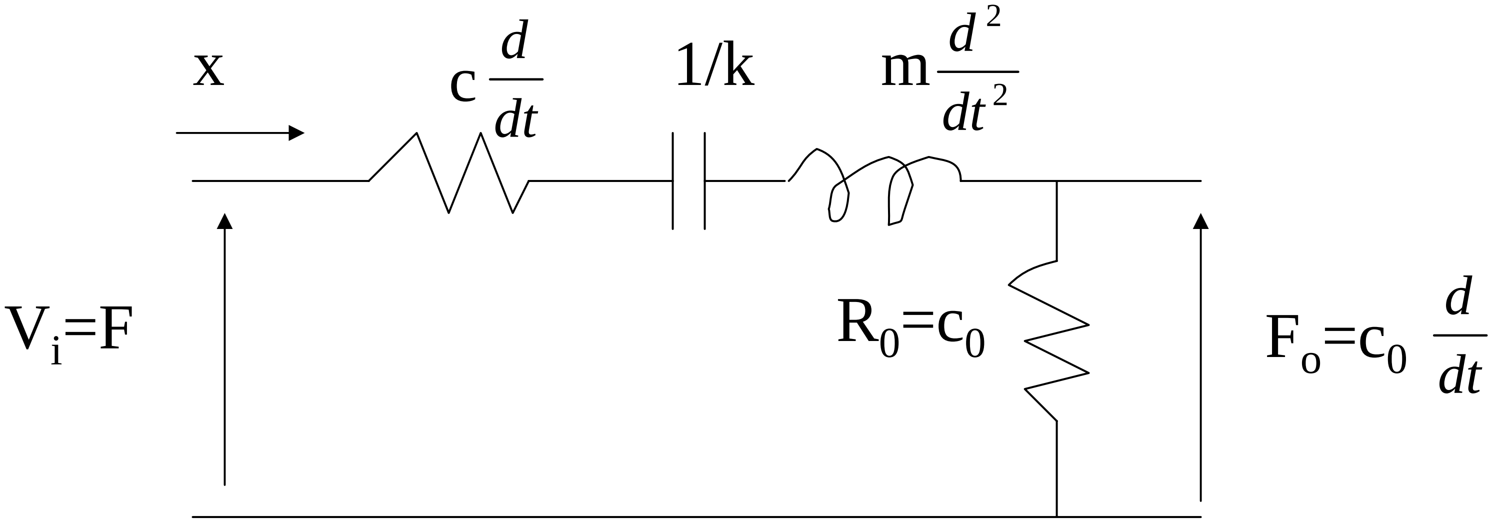
$$E = \frac{1}{2} c v^2$$

- 电阻耗散的能量：

$$P = iv = \frac{v^2}{R}$$

机和电的类比

电流 i:	位移 x（无速度）
电感 L:	质量m
电容C:	柔度1/k
电阻R:	阻尼c



机械系统	电气系统	
	电压--力模拟	电流--力模拟
达朗贝尔原理	基尔霍夫电压定律	基尔霍夫电流定律
自由度	回路	接点
力的施加	开关闭合	开关闭合
f 力（N）	V 电压（v）	i 电流（A）
m 质量（kg）	L 电感（H）	C 电容（F）
X 位移（m）	Q 电荷（C）	$\Phi=\int Vdt$
$\dot{X}$ 速度	i 回路电流（A）	V 接点电压（v）
c 阻尼系数（N·s/m）	R 电阻（Ω）	1/R 电导
k 弹簧刚度（N/m）	1/C 电容倒数	1/L 电感倒数
耦合元件	两回路共用元件	接点间元件

系统模型

系统泛指由一群有关连的个体组成，根据预先编排好的规则工作，能完成个别元件不能单独完成的工作的群体。系统分为自然系统与人工系统两大类。

工程的角度:系统指为完成某一特定任务由多个功能单元或组件形成有机整体。例如汽车、机床、机器人、飞机等。

机电一体化系统模型

- 大多数的机电一体化系统是混合类型，如机械、电子等。
- 在一个混合系统，每个子系统首先可以作为单一的理论体系建模。
- 不同子系统之间的能量转换用来将它们集成为整个系统。
- 整体数学模型可以组合为一个方程组,或者一个传递函数。

机电系统数学模型

常用的数学模型有微(差)分方程、传递函数、结构图和信号流图、频率特性以及状态空间表达式。

其中状态空间表达式是应用现代控制理论研究控制系统，特别是多输入多输出系统特性的数学模型。

机电系统的数学模型

一个实体的数学模型可以通过分析和实验的方法得到

- 分析模型是系统根据物理定律导出的，如牛顿定律、欧姆定律等。
- 它通常组合成一个或多个微分(对于离散时间系统是差分)方程
- 一个分析模型可以是线性或非线性的

• 机电系统数学模型的建立方法

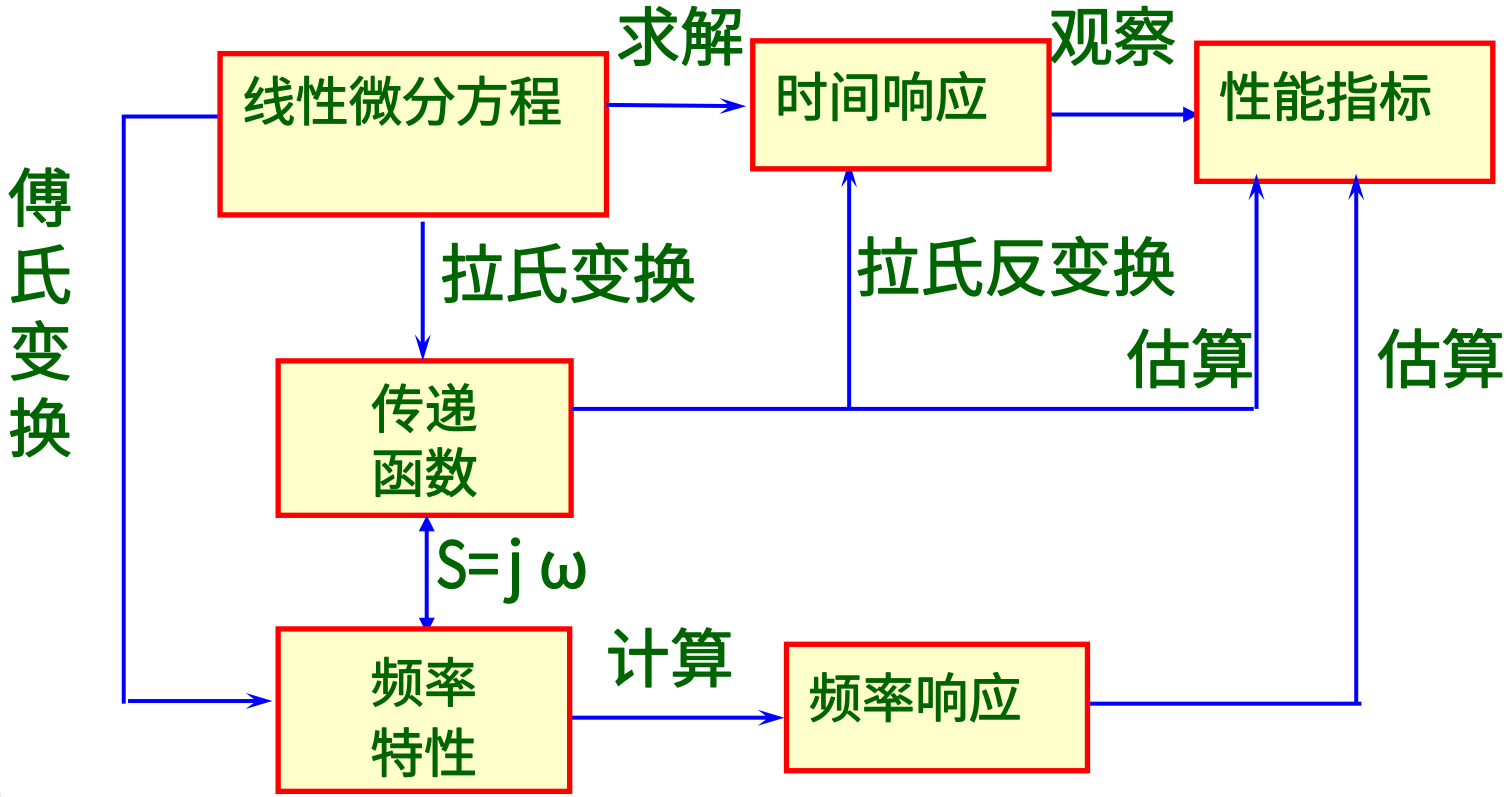
• 其方法有解析法和实验法两类

解析法确定数学模型时要求确定控制系统的数学模型，要求依据系统及元件各变量之间所遵循的物理、化学定律，列出各变量间的数学关系式

实验法确定数学模型时要求对系统施加典型的测试信号（脉冲、阶跃或正弦信号），记录系统的时间响应曲线或频率响应曲线，从而获得系统的传递函数或频率特性

建立系统模型的主要目的：

• 主要目的是为了分析系统的性能



- 在研究控制系统时，必须建立动态系统的数学模型，并且分析系统的动态特性。

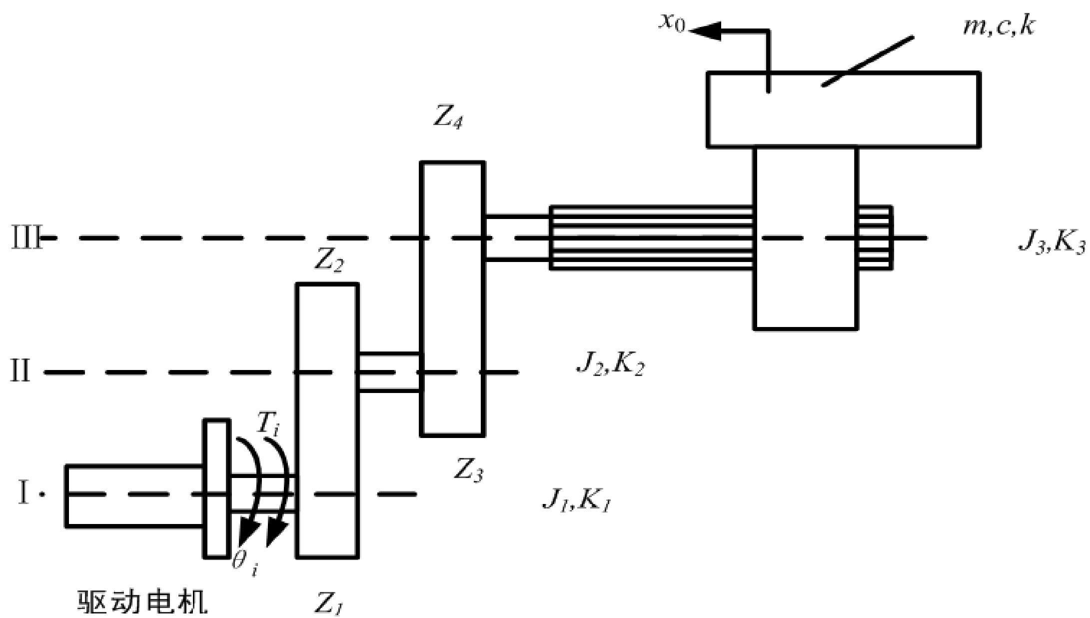
  - *系统按其微分方程是否线性，可分为线性系统与非线性系统。*

  - *线性系统满足叠加性，即系统的几个输入同时作用于系统时，可以逐个输入，求出输出，然后逐个叠加，求出总输出。*

- 系统的数学模型可以多样化，但是否线性与非线性完全由系统的结构与参数确定。

工程实例

分析数控机床机械系统的动态特性



数控机床的机械传动系统

机电系统的微分方程

解：为了建立微分方程，将各环节转动惯量、质量和阻尼系数归算到Ⅰ轴。

从输入轴到工作台经过3根轴，而每根轴均具有不同的转动惯量和扭转刚度。Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ轴的转动惯量和扭转刚度分别为J_1，J_2，J_3和k_1，k_2，k_3；m为工作台质量；k为丝杠螺母副及螺母底座部分的轴向刚度；c为工作台粘性阻尼系数；z_1、z_2、z_3、z_4分别是Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ轴上齿轮的齿数；T_i为输入转矩；θ_i为输入转角；x_o为工作台位移。

（1）每个轴的转动惯量及工作台质量归算

Ⅱ轴的转动惯量J_2归算到Ⅰ轴J_2'，即

$$J_2' = J_2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$$

机电系统的微分方程

Ⅲ轴的转动惯量J_3归算到Ⅰ轴为J_3'，即

$$J_3' = J_3\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2$$

工作台的质量m归算到Ⅲ轴的转动惯量J_m，设丝杠的导程为l，则有

$$J_m = m\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

工作台的质量m归算到Ⅰ轴的转动惯量为J_m'

$$J_m' = m\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2$$

转动惯量归算到Ⅰ轴后，Ⅰ轴的总转动惯量为

$$J = J_1 + J_2' + J_3' + J_m' = J_1 + J_2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 + J_3\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2$$

机电系统的微分方程

（2）传动刚度归算

传动系统的传动刚度可由扭转刚度和轴向刚度两部分组成，下面分别进行归算。

扭转刚度的归算：Ⅱ轴扭转刚度k_2归算到Ⅰ轴为k_2'，即

$$k_2' = k_2 (\frac{Z_1}{Z_2})^2$$

轴向刚度的归算：工作台的轴向刚度k归算到Ⅲ轴为k'，即

$$k' = k(\frac{l}{2\pi})^2$$

Ⅲ轴上总的等效扭转刚度$k_{Ⅲ}$为

$$k_{Ⅲ} = \frac{1}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k'}} = \frac{1}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k(\frac{l}{2\pi})^2}}$$

机电系统的微分方程

Ⅲ轴上的等效扭转刚度k_{III}归算到Ⅰ轴为k_3'，即

$$k_3' = \frac{1}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k'}}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2$$

传动系统的传动刚度归算到Ⅰ轴后，Ⅰ轴的总的等效刚度为k^*，即

$$k^* = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2'} + \frac{1}{k_3'}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2}}$$

（3）粘性阻尼系数归算

这里只考虑工作台导轨的阻尼系数c的归算。工作台导轨阻尼系数c归算到III轴，等效阻尼系数c'为

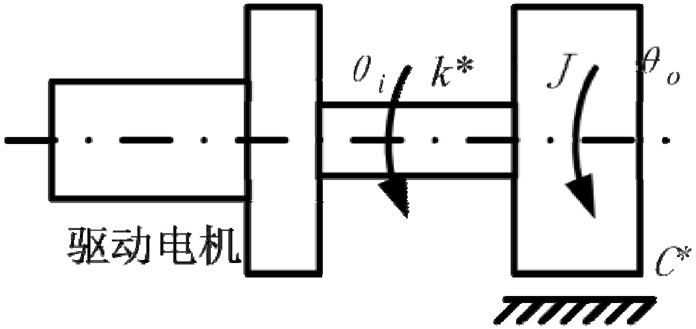
$$c' = c\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

再归算到I轴，等效阻尼系数为

$$c^* = c\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)^2$$

机电系统的微分方程

机械传动系统简化为等效机械传动系统



等效的数控机床的机械传动系统

（4）数控机床机械传动系统微分方程

由牛顿第二定律可列出这个等效机械旋转系统的微分方程为

$$k^*(\theta_i-\theta_o)-c^*\frac{d\theta_o}{dt}=J\frac{d^2\theta_o}{dt^2}$$

标准形式为

$$J\frac{d^2\theta_o}{dt^2}+c^*\frac{d\theta_o}{dt}+k^*\theta_o=k^*\theta_i$$

（5）等效机械传动系统以电机轴转角为输入量，工作台位移为输出量的微分方程。

$$J\left(\frac{l}{2\pi}\right)\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)\frac{\mathrm{d}^2 x_o}{\mathrm{d}t^2}+c'\left(\frac{l}{2\pi}\right)\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}+k'\left(\frac{l}{2\pi}\right)\left(\frac{Z_1}{Z_2}\cdot\frac{Z_3}{Z_4}\right)x_o=k'\theta_i$$

应用点评

把传动系统各部分的质量、阻尼系数和弹簧刚度归算到一根轴上，将系统简化为一个传动系统模型，根据牛顿第二定律建立系统的微分方程，是工程上常用的建立系统微分方程的一种方法。

• 进行拉氏变换,可求得该系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{(\frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4})(\frac{L}{2\pi})k^*}{Js^2+c^*s+k^*}=(\frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4})(\frac{L}{2\pi})\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中:

ω_n ——系统的固有频率,其值为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k^*}{J}}$$

ξ ——系统的阻尼比,其值为

$$\xi=\frac{c^*}{2\sqrt{Jk^*}}$$

- ω_n和 ξ是二阶系统的两个特征参量,它们是由惯量（质量）、摩擦阻力系数、弹性变形系数等结构参数决定的。对于电气系统，ω_n和 ξ则由*R*、*C*、*L*物理量决定,它们具有相似的特性。
- 将$s=j\omega$代入上式可求出$A(\omega)$和$\Phi(\omega)$,即该机械传动系统的幅频特性和相频特性。由$A(\omega)$和$\Phi(\omega)$可以分析出系统不同频率的输入（或干扰）信号对输出幅值和相位的影响,从而反映了系统在不同精度要求状态下的工作频率和对不同频率干扰信号的衰减能力。

前面讲解的是

6.1节——数学模型

下面将讲解

6.2节——PID控制模型