Chapter 1
The Foundation: Logic and Proof

补充练习

- 用一阶谓词公式描述下列命题的结构（使用全总个体域）
  1. 没有不犯错误的人；
  2. 所有运动员都敬佩某些教练；
  3. 所有有理数都是实数；
  4. 没有有理数是实数；
  5. 某些有理数是实数；
  6. 某些有理数不是实数；
  7. 没有最大的自然数；
  8. R是集合A上的全序关系；
  9. 部分序集 (A，≤)有最大元

❑ 证明

1. $p \to (q \to r),\ p,\ q \Rightarrow r \vee s$
2. $p \to q,\ \neg(q \wedge r),\ r \Rightarrow \neg p$
3. $p \to q \Rightarrow p \to (p \wedge q)$
4. $q \to p,\ q \leftrightarrow s,\ s \leftrightarrow t,\ t \wedge r \Rightarrow p \wedge q$
5. $p \to r,\ q \to s,\ p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$
6. $\neg p \vee r,\ \neg q \vee s,\ p \wedge q \Rightarrow t \to (r \vee s)$
7. $p \to (q \to r),\ s \to p,\ q \Rightarrow s \to r$
8. $p \to \neg q,\ \neg r \vee q,\ r \wedge \neg s \Rightarrow \neg p$

证明

1. $\forall x(\neg A(x)\rightarrow B(x)),\ \forall x\neg B(x)\Rightarrow \exists x\ A(x)$;
2. $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow \forall x(A(x)\rightarrow B(x))$;
3. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)),\ \ \forall x\ (C(x)\rightarrow\neg B(x)) \Rightarrow\forall x(C(x)\rightarrow\neg A(x))$;
4. $\forall x(A(x)\vee B(x)),\ \forall x(B(x)\rightarrow\neg C(x)),\ \forall xC(x) \Rightarrow \forall x A(x)$;
5. $\exists xA(x)\rightarrow\forall x((B(x)\vee A(x))\rightarrow C(x)),\ \exists xA(x),\ \exists xB(x) \Rightarrow \exists x\exists y(A(x)\wedge C(y))$;
6. $\neg\forall x(P(x)\wedge Q(x)),\ \forall xP(x)\Rightarrow\neg\forall xQ(x)$.

- 证明下列恒等式：

1. $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$
2. $(p \to s) \wedge (q \to s) \equiv (p \vee q) \to s$
3. $((p \wedge q) \to r) \wedge (q \to (s \vee r)) \equiv$
   $(q \wedge (s \to p)) \to r$
4. $p \to (q \to p) \equiv \neg p \to (p \to \neg q)$
5. $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
6. $(((p \wedge q) \wedge s) \to t) \wedge (s \to (p \vee (q \vee t))) \equiv$
   $(s \wedge (p \leftrightarrow q)) \to t$