文章编号:1001-5132（2008）03-0370-04

巴乌金二次系统焦点量又一种计算方法

曹 勃[1]，云连英[2]

（1.宁波职业技术学院，浙江 宁波 315800；2.台州职业技术学院 计算机工程系，浙江 台州 318000）

摘要：通过具有三阶细鞍点二次系统的鞍点量公式，较简洁地推证出具有三阶细焦点巴乌金(Ваутин)二次系统的焦点量公式，由此说明二次系统的焦点量与鞍点量的相互关系.

关键词：巴乌金二次系统；鞍点量；焦点量

中图分类号：O175 文献标识码：A

1 引言与结果

在文献[1]中，通过作变换

$$\xi=\frac{x+y}{2},\eta=\frac{1}{2i}(x-y),\tau=\frac{t}{i}\ ,$$

借助巴乌金(Ваутин)具有三阶细焦点二次系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2,\end{cases}\tag{1}$$

并利用二次系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2,\end{cases}\tag{2}$$

的 3 个焦点量公式，通过详细计算推证具有三阶细鞍点二次系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+Ax^2+Bxy+Cy^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y-Kx^2-Lxy-My^2,\end{cases}\tag{3}$$

的 3 个鞍点量公式.

本文反过来利用系统(3)的 3 个鞍点量公式，经过简洁的计算而推证系统(1)的 3 个焦点量公式，结果如下：

(a) 系统(1)的 3 个焦点量 $\upsilon_i\,(i=1,2,3)$ 分别为[2]：

$$\upsilon_1=-\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)\ ,\tag{4a}$$

$$\upsilon_2=\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)]\ ,\tag{4b}$$

$$\upsilon_3=-\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)\ .\tag{4c}$$

(b) 系统(3)的 3 个鞍点量 $u_i\,(i=1,2,3)$ 分别为[1]：

$$u_1=LM-KB,$$

$$u_2=KB(2M-B)(M+2B)-CL(2A-L)(A+2L),$$

$$u_3=(CK-LB)[ACL(2A-L)-BKM(2M-B)]\ .$$

定理 1 具有三阶细鞍点二次系统(3)的鞍点量公式，可以推证出具有三阶细焦点二次系统(1)的焦点量公式.

2 定理的证明

先证明几个引理. 对于系统(1)，作变换

$$\xi=x+yi,\eta=x-yi,\tau=it,\tag{5}$$

即 $x=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\ y=\dfrac{1}{2i}(\xi-\eta),\ t=\dfrac{\tau}{i},$

则系统(1)可化为：

收稿日期：2007-07-20. 宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn

第一作者：曹 勃（1973－），男，安徽安庆人，硕士/讲师，主要研究方向：应用数学. E-mail: cbh7331@163.com

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=\xi+A\xi^2+B\xi\eta+C\eta^2,\\ \dfrac{d\eta}{d\tau}=-\eta-K\xi^2-L\xi\eta-M\eta^2.\end{cases}\tag{6}$$

引理 1　由系统(5)联系的系统(1)和(6)之间系数的关系为：

$$\begin{aligned}&A=-\frac{i}{4}(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)-\frac{1}{4}\lambda_5,\\&B=\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6),\\&C=\frac{i}{4}(3\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)+\frac{1}{4}(4\lambda_2+\lambda_5),\\&K=-\frac{i}{4}(3\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)+\frac{1}{4}(4\lambda_2+\lambda_5),\\&L=-\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6),\\&M=\frac{i}{4}(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)-\frac{1}{4}\lambda_5.\end{aligned}\tag{7}$$

证明　因为 $\xi=x+yi$，所以

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}i=[-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2]+[x+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2]i.\tag{8}$$

整理(8)式可得：

$$\frac{d\xi}{dt}=i\xi+[-\frac{1}{4}\lambda_3+\frac{1}{4i}(2\lambda_2+\lambda_5)-\frac{1}{4}\lambda_6+\frac{i}{4}\lambda_2+\frac{1}{4}(2\lambda_3+\lambda_4)-\frac{1}{4i}\lambda_2]\xi^2+(-\frac{1}{2}\lambda_3+\frac{1}{2}\lambda_6+\frac{i}{2}\lambda_2+\frac{1}{2i}\lambda_2)\xi\eta+[-\frac{1}{4}\lambda_3-\frac{1}{4i}(2\lambda_2+\lambda_5)-\frac{1}{4}\lambda_6+\frac{i}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}(2\lambda_3+\lambda_4)-\frac{1}{4i}\lambda_2]\eta^2.$$

同理，可以得到：

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{d\xi}{d(it)}=\xi+(-\frac{i}{4}\lambda_3-\frac{i}{4}\lambda_4-\frac{1}{4}\lambda_5+\frac{i}{4}\lambda_6)\cdot\xi^2+\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)\xi\eta+(\lambda_2+\frac{3i}{4}\lambda_3+\frac{i}{4}\lambda_4+\frac{1}{4}\lambda_5+\frac{i}{4}\lambda_6)\eta^2.$$

与系统(6)比较系数得：

$$A=-\frac{i}{4}(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)-\frac{1}{4}\lambda_5,$$

$$B=\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6),$$

$$C=\frac{i}{4}(3\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)+\frac{1}{4}(4\lambda_2+\lambda_5).$$

同理通过计算 $d\eta/d\tau$，与系统(6)比较系数得：

$$K=-\frac{i}{4}(3\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)+\frac{1}{4}(4\lambda_2+\lambda_5),$$

$$L=-\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6),$$

$$M=\frac{i}{4}(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)-\frac{1}{4}\lambda_5.$$

引理 2　设系统(6)的鞍点 O 是 m 阶细鞍点，其第 m 阶鞍点量是 u_m，则系统(1)的焦点 O 是 m 阶细焦点，其第 m 阶焦点量 υ_m 是 iu_m.

注意　这里系统(6)的鞍点 O 是 m 阶细鞍点，其中第 m 阶鞍点量 u_m 表示：如果将 ξ,η 和 τ 看作实变量，系数 A,B,C,K,L,M 看作实数，O 是细鞍点且具有用 A,B,C,K,L,M 表示的鞍点量计算公式，现把 ξ,η 和 τ 看作复变量，A,B,C,K,L,M 看作复数，如果相应的 $u_k=0\ (k<m), u_m\neq 0$，则称 O 是 m 阶细鞍点，u_m 是 m 阶鞍点量.

证明　$V=x^2+y^2+\sum f(x,y)$，其中 $f_l(x,y)$ 是 x,y 的 l 次齐次多项式，联系到变换(5)有[3]：

$$V=\xi\eta+\sum_{l\geqslant 3}f_l(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2i}),$$

$$\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(1)}=[\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}]_{(1)}=[\frac{\partial\upsilon}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\tau})+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\tau}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\tau})]_{(6)}\frac{d\tau}{dt}=i\left.\frac{d\upsilon}{d\tau}\right|_{(6)}.$$

比较两边同次项系数，得 $v_m=iu_m$. 证毕.

下面分别再通过几个引理来叙述由二次系统的细鞍点量公式，由此可逐步推出巴乌金(Ваутин)焦点量公式.

引理 3　系统(1)的焦点 $O(0,0)$ 的第一焦点量是(4a)式.

证明　系统(6)的鞍点 $O(0,0)$ 的第一鞍点量是

$$u_1=LM-AB=[-\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)][\frac{i}{4}(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)-\frac{1}{4}\lambda_5]-[-\frac{i}{4}(\lambda_3+\lambda_4-\lambda_6)-$$

$$\frac{1}{4}\lambda_5][\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)]=\frac{i}{4}\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6).$$

再由引理 2，有 $\upsilon_1=iu_1=-\frac{1}{4}\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)$，略去无关正因子，即得(4a)式.

引理 4 系统(1)的焦点 $O(0,0)$ 的第 2 鞍点量是(4b)式.

证明 系统(6)的鞍点 $O(0,0)$ 的第 2 鞍点量是

$$u_2=KB(2M-B)(2M+2B)-CL(2A-L)(A+2L).$$

考虑到 $V_1=0$，即 $\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)=0$.

可分 2 种情况讨论如下：

(a) 若 $\lambda_3-\lambda_6=0$，则

$$B=\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)=0, L=-\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)=0,$$

所以 $u_2=0$，即 $\upsilon_2=iu_2=0$.

(b) 若 $\lambda_3-\lambda_6\neq 0, \lambda_5=0$，

又因为

$$2M-B=\frac{i}{2}\lambda_4,$$

$$M+2B=\frac{i}{4}[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)],$$

$$2A-L=-\frac{i}{2}\lambda_4,$$

$$A+2L=-\frac{i}{4}[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)],$$

所以[4]

$$u_2=KB(2M-B)(M+2B)-CL(2A-L)(A+2L)=[\lambda_2-\frac{i}{4}(3\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)]\cdot[\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)](\frac{i}{2}\lambda_4)\frac{i}{4}[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)]-[\lambda_2+\frac{i}{4}(3\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)][-\frac{i}{2}(\lambda_3-\lambda_6)]\cdot(-\frac{i}{2}\lambda_4)(-\frac{i}{4})[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)].$$

整理化简后可知：

$$u_2=-\frac{i}{8}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)],$$

故 $\upsilon_2=iu_2=\frac{1}{8}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)]$，略去无关正因子 $1/8$，即得(4b)式.

引理 5 系统(1)的焦点 $O(0,0)$ 的第 3 焦点量是(4c)式.

证明 系统(6)的鞍点 $O(0,0)$ 的第 3 鞍点是

$$u_3=(CK-LB)[ACL(2A-L)-BKW(2M-B)].$$

考虑 $\upsilon_1=\upsilon_2=0$，即 $\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)=0$，且 $\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)[\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)]=0$.

下面分几种情况讨论：

(a) 当 $\lambda_3-\lambda_6=0$ 时，可以得知：

$$B=0, L=0,$$

所以 $u_3=0$，即 $\upsilon_3=iu_3=0$.

(b) 当 $\lambda_3-\lambda_6\neq 0$ 时，可以得知：

(I) 当 $\lambda_5=0$，且 $\lambda_2=0$ 时，

$$ACL(2A-L)-BKM(2M-B)=0,$$

所以

$$u_3=(CK-LB)[ACL(2A-L)-BKM\cdot(2M-B)]=0.$$

所以这时 $\upsilon_3=iu_3=0$.

(II) 当 $\lambda_5=0$，且 $\lambda_4=0$ 时，由于

$$2A-L=-\frac{i}{2}\lambda_4=0, 2M-B=\frac{i}{2}\lambda_4=0,$$

所以可以得到：

$$u_3=(CK-LB)[ACL(2A-L)-BKM(2M-B)]=(CK-LB)\cdot 0=0,$$

这时 $\upsilon_3=iu_3=0$.

(III) 当 $\lambda_5=0$ 且 $\lambda_4+5(\lambda_3-\lambda_6)=0$ 时，分别计算 $CK-LB$ 和 $ACL(2A-L)-BKM(2M-B)$，可以得到：

$$u_3=\frac{i}{2}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2),$$

这时

$$\upsilon_3=iu_3=-\frac{1}{8}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2),$$

略去无关因子 $\frac{1}{2}$，即得(4c)式.

综上所述，由引理 3～5 知，系统(1)的焦点量公式全部成立.

文献[1]利用焦点量公式计算出鞍点量公式，本文则反过来用鞍点量公式计算焦点量公式. 这

就说明已知焦点量可计算鞍点量，而已知鞍点量又可计算焦点量，进一步也证实了由鞍点量计算焦点量比由焦点量计算鞍点量相对容易.

参考文献：

[1] 蔡燧林. 二次系统的细鞍点与分界线环[J]. 数学学报, 1987, 30(4):553-559.

[2] 叶彦谦. 极限环论[M]. 2 版. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.

[3] Ali M, 罗定军. $(III)_{m=0}$ 类二次系统的极限环问题(III)[J]. 高校应用数学学报(B 辑), 2005, 20(4):431-440.

[4] 吴兆荣, 朱丽芹, 刁建东. Bautin 焦点量公式的一种推导方法[J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2005, 19(4): 367-369.

A New Approach for Calculating Focus of Bаутин's Quadratic Differential System

CAO Bo[1], YUN Lian-ying[2]

(1.Ningbo Plolytechnic, Ningbo 315800, China; 2. Taizhou Vocational & Technical College, Taizhou 318000, China)

Abstract: Based on the saddle point value of a quadratic differential system with weak 3-order saddle points, the paper gives concise yet clear derivation of the focus value of Bаутин's quadratic different system with weak 3-order focuses. As a result, the profound relation between saddle point value and focus value of quadratic differential system is validated.

Key words: Bаутин's quadratic differential system; saddle point value; focus value

CLC number: O175　　**Document code:** A

（责任编辑　史小丽）