

# 求解二维 Euler 方程的时 - 空守恒格式<sup>1)</sup>

张增产 沈孟育

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

**摘要** 将作者原来得出的一维时 - 空守恒格式推广到了二维情形, 得到了二维 Euler 方程的时 - 空守恒格式, 并用几个典型算例进行了检验计算, 结果表明: 得到的二维时 - 空守恒格式保留了一维格式所有的优点, 格式简单, 通用性强, 对激波等间断具有很高的分辨率.

**关键词** 二维 Euler 方程, 时 - 空守恒, 守恒元和解元, 数值方法, 激波分辨率

## 引 言

时 - 空守恒元和解元方法 (简称 CE/SE 方法) 是 S.C. Chang 在文献 [1] 中提出的一种全新的数值方法. 该方法无论从概念上还是从构造方法上都与传统的数值方法有所不同. 首先, 它把时间与空间完全统一起来同等对待, 并从守恒律积分型方程出发, 通过设立守恒元和解元, 使格式局部和全局都严格保证其物理意义上的守恒律. 而大多数传统方法都是针对微分方程来进行数值离散的, 且一般都把时间和空间方向分开来处理, 这就很难严格保证本质上是时间与空间统一的物理守恒律; 其次, 该方法把流场变量及其对空间偏导数都作为独立变量同时进行求解, 这样就避免了解的重构过程, 同时在相同格式点数的情况下解的精度可以达到更高; 另外, 它除利用了简单的台劳展开式外, 无需任何其它的数值逼近技术, 也不需要利用特征技术或多维情况下的通量分裂技术, 因此该方法思想简单、通用性好. 但是, 当该方法推广到多维情形 (尤其是三维) 时会变得非常复杂. 为此, 作者对其进行了改进, 改变了原格式的构造方法, 由此得到的新格式既保留了原方法的优点, 同时又更加简单, 通用性更强, 尤其极易推广到多维情形及高阶格式, 另外还具有精度高、对激波等间断分辨率强等优点. 本文将文献 [2~4] 中得到的一维时 - 空守恒格式推广到了二维情形, 得到了二维 Euler 方程的时 - 空守恒格式, 这里给出了两种有效的守恒元和解元划分方法及相应的格式. 最后, 用几个二维典型算例进行了检验计算, 结果表明了本文格式所具有的许多优越性.

## 1 二维 Euler 方程的时 - 空守恒格式

完全气体二维非定常 Euler 方程组的无量纲形式可写成

$$\partial u_m / \partial t + \partial f_m / \partial x + \partial g_m / \partial y = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = t$  代表 Euclidean 空间  $E_3$  中的三个坐标, 利用 Gauss 散度定理可知, 微分方程 (1) 可写成如下积分型守恒律方程形式

$$\oint_{S(V)} h_m \cdot ds = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

1997-03-31 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目.

其中  $S(V)$  是  $E_3$  中任一区域  $V$  的边界,  $h_m = (f_m, g_m, u_m)$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  分别是时间 - 空间中的质量、 $x$  和  $y$  方向动量及能量的流密度向量. 值得注意的是, 这里积分方程 (2) 是把时间和空间完全统一起来同等看待而得到的.

下面将首先给出守恒元和解元的划分方法, 实际上如何设计守恒元 (CE) 和解元 (SE) 是 CE/SE 方法的关键之一, 不同的划分方法将导致不同的计算格式. 所谓守恒元就是时 - 空中的某一小区域, 在其中要求积分方程 (2) 成立. 为此可把整个求解域按一定要求划分成若干个相互不重叠的守恒元, 并要求积分方程 (2) 在其上得到满足, 这样一来便可保证积分方程 (2) 在局部及全局均得到满足; 而解元则是在每一网点附近的一个微小区域, 在其中假定流场变量可以用简单函数来近似. 在原始的 CE/SE 方法中, 每一网点上要求其守恒元个数与独立变量的个数相等, 以便得到相应数量的离散方程来求解这些变量. 因此, 在二维情形对于每一网点需要设计三个守恒元, 以便利用由得到的三个离散方程来联立求解三个独立变量, 这样一来守恒元设计非常复杂, 格式推导非常繁琐、使用起来不大方便. 为此, 本文作者对原格式构造方法进行了改进, 即在每个网点只设计一个守恒元, 由此得到一个主要的离散方程, 而采用流场变量在两个相邻时间半层解元的公共点上连续的假设或简单采用有限差分的方法来补充其它的几个关系式, 这样一来格式构造非常简单、便于应用, 同时守恒元的设计很简单, 也容易进一步推广到三维情形. 下面将介绍两种有效的守恒元和解元划分方法, 并给出相应的格式.

### 1.1 第一种守恒元和解元划分下的二维时 - 空守恒格式

这里先给出一种较简单的守恒元和解元划分方法及相应的二维时 - 空守恒格式. 它在  $x-y$  平面上的网点布局如图 1(a) 所示, 其中空心圆点和叉点分别表示两个不同时间半层上的网格点, 它们是相互交错的. 用  $\Omega$  代表  $E_3$  中的网格点  $(i, j, n)$  集合, 其中  $n = 0, \pm 1/2, \pm 2/2, \dots$ , 对每一个  $n$ , 取  $i, j = n \pm 1/2, n \pm 3/2, \dots$ .  $\forall (i, j, n) \in \Omega$ , 设有一个解元  $SE(i, j, n)$  和一个守恒元  $CE(i, j, n)$  与之对应 (见图 1(b)), 其中解元  $SE(i, j, n)$  取图中六面体  $E'F'G'H'H''G''F''E''$  再加上中间平面  $ABCD$ , 而守恒元  $CE(i, j, n)$  则取为六面体  $ABCDD'C'B'A'$ .

$\forall (x, y, t) \in SE(i, j, n)$ , 用不同函数  $u_m^*(x, y, t; i, j, n)$ ,  $f_m^*(x, y, t; i, j, n)$  和  $g_m^*(x, y, t; i, j, n)$  来逼近控制方程中的  $u_m(x, y, t)$ ,  $f_m(x, y, t)$  和  $g_m(x, y, t)$ , 便可以得到不同精度的格式.

若采用以下一阶台劳展开式来进行逼近

$$u_m^*(x, y, t; i, j, n) = (u_m)_{i,j}^n + (u_{mx})_{i,j}^n(x - x_i) + (u_{my})_{i,j}^n(y - y_j) + (u_{mt})_{i,j}^n(t - t^n) \quad (3)$$

$$f_m^*(x, y, t; i, j, n) = (f_m)_{i,j}^n + (f_{mx})_{i,j}^n(x - x_i) + (f_{my})_{i,j}^n(y - y_j) + (f_{mt})_{i,j}^n(t - t^n) \quad (4)$$

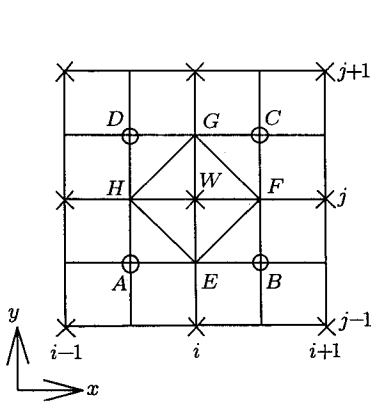
$$g_m^*(x, y, t; i, j, n) = (g_m)_{i,j}^n + (g_{mx})_{i,j}^n(x - x_i) + (g_{my})_{i,j}^n(y - y_j) + (g_{mt})_{i,j}^n(t - t^n) \quad (5)$$

相应地可设

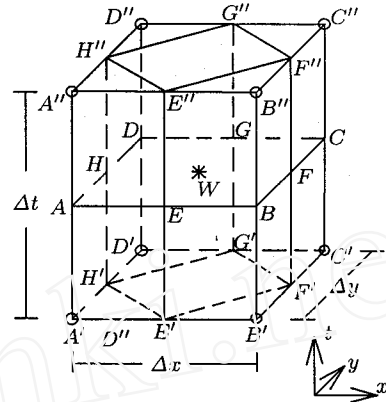
$$h_m^*(x, y, t; i, j, n) = (f_m^*(x, y, t; i, j, n), g_m^*(x, y, t; i, j, n), u_m^*(x, y, t; i, j, n)) \quad (6)$$

于是方程 (2) 便可以用下式来逼近

$$\oint_{S(CE(i,j,n))} h_m^* \cdot ds = 0, \quad \forall (i, j, n) \in \Omega \quad (7)$$



(a)  $x-y$  平面上的交错网格点布局;  
(a) Staggering meshes in the  $x-y$  plan;



(b) 解元  $SE(i, j, n)$  和守恒元  $CE(i, j, n)$  构成  
(b) Definitions of  $SE(i, j, n)$  and  $CE(i, j, n)$

图 1  
Fig.1

分别将  $u_m = u_m^*(x, y, t; i, j, n)$ ,  $f_m = f_m^*(x, y, t; i, j, n)$  和  $g_m = g_m^*(x, y, t; i, j, n)$  代入方程 (1) 可得

$$(u_{mt})_{i,j}^n = -(f_{mx})_{i,j}^n - (g_{my})_{i,j}^n \tag{8}$$

由式 (8) 及简单分析不难看出, 在每个网点上最终要求解的独立变量只有  $u_m, u_{mx}$  和  $u_{my}$ .

将式 (3)~(5) 代入式 (6) 然后一并代入式 (7), 经过适当整理便可以得到

$$(u_m)_{i,j}^n = \{Q_m(-\Delta x/2, \Delta y/2)\}_{i-1/2, j+1/2}^{n-1/2} + \{Q_m(-\Delta x/2, -\Delta y/2)\}_{i-1/2, j-1/2}^{n-1/2} + \{Q_m(\Delta x/2, \Delta y/2)\}_{i+1/2, j+1/2}^{n-1/2} + \{Q_m(\Delta x/2, -\Delta y/2)\}_{i+1/2, j-1/2}^{n-1/2} \tag{9}$$

其中

$$Q_m(\Delta x, \Delta y) = (2u_m - \Delta x \cdot u_{mx} - \Delta y \cdot u_{my})/8 - (\Delta t/16)(2f_m - \Delta y \cdot f_{my} + \Delta t \cdot f_{mt}/2)/\Delta x - (\Delta t/16)(2g_m - \Delta x \cdot g_{mx} + \Delta t \cdot g_{mt}/2)/\Delta y$$

为了得到另外二个补充计算关系式, 令  $u_m^*$  在两个相邻的不同时间半层解元的交接点 A, B, C 和 D 处连续, 便得到如下两个补充关系式

$$(u_{mx})_{i,j}^n = [(u_{ml_1})_{i,j}^n + (u_{ml_2})_{i,j}^n]/2 \cos(\theta), \quad (u_{my})_{i,j}^n = [(u_{ml_1})_{i,j}^n - (u_{ml_2})_{i,j}^n]/2 \sin(\theta) \tag{10}$$

其中:

$$\begin{aligned} (u_{ml_1})_{i,j}^n &= [(u_{ml_1}^+)_{i,j}^n + (u_{ml_1}^-)_{i,j}^n]/2, & (u_{ml_2})_{i,j}^n &= [(u_{ml_2}^+)_{i,j}^n + (u_{ml_2}^-)_{i,j}^n]/2 \\ (u_{ml_1}^\pm)_{i,j}^n &= \pm [(u_m')_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}^n - (u_m)_{i,j}^n]/(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}/2) \\ (u_{ml_2}^\pm)_{i,j}^n &= \pm [(u_m')_{i\pm 1/2, j\mp 1/2}^n - (u_m)_{i,j}^n]/(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}/2) \\ (u_m')_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}^n &= \{u_m + \Delta t \cdot u_{mt}/2\}_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}^{n-1/2} \end{aligned} \tag{11}$$

这里  $\cos(\theta) = \Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ;  $\sin(\theta) = \Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , 实际上  $u_{ml_1}$  及  $u_{ml_2}$  可看成是两个方向导数. 对于含有激波等间断问题的计算时, 可在格式中加入适当的人工粘性或采用一定的限制技术. 这里我们将式 (11) 中  $u_{ml_1}$  及  $u_{ml_2}$  的计算式由简单平均变成如下加权平均 (相当于一个简单的梯度限制器), 即取:

$$(u_{ml_k})_{i,j}^n = W((u_{ml_k}^-)_{i,j}^n, (u_{ml_k}^+)_{i,j}^n, \alpha) \quad (k = 1, 2) \quad (12)$$

这里  $\alpha$  是一个参数, 一般取  $\alpha = 1$  或  $2$  即可;  $W$  是一个限制函数, 其定义如下:

$$(i) W(0, 0, \alpha) = 0;$$

$$(ii) W(x_-, x_+, \alpha) = [|x_+|^{\alpha} x_- + |x_-|^{\alpha} x_+] / [|x_+|^{\alpha} + |x_-|^{\alpha}], \text{ 当 } |x_+|^{\alpha} + |x_-|^{\alpha} \neq 0$$

这样一来便可以有效地抑制其非物理振动 (见后面的算例).

式 (9) 和 (10) 就是本文得出的相应于第一种划分下的二维 Euler 方程时 - 空守恒格式. 这是一个显格式, 它具有 CE/SE 方法的全部优点, 如它可严格保证局部及全局范围的时间 - 空间统一的物理守恒律; 格式所需网格单元少, 便于边界处理等. 同时与一维格式一样, 格式构造比原方法更简单, 使用起来非常方便.

## 1.2 第二种守恒元和解元划分下的二维时 - 空守恒格式

实际上守恒元和解元的划分方法可以有多种, 每种划分下得出的格式也不完全相同, 前面给出的只是其中比较简单的一种方法. 下面再给出一种守恒元和解元的划分方法及相应的格式. 设在  $x-y$  平面上的网点布局如图 2(a) 所示, 其中空心圆点和叉点分别表示两个不同时间半层上的网格点, 它们是相互交错的. 用  $\Omega$  代表  $E_3$  中的网格点  $(i, j, n)$  集合, 其中  $n, j = 0, \pm 1/2, \pm 2/2, \dots$ ,  $i = n+j \pm 0, n+j \pm 1, \dots$ .  $\forall (i, j, n) \in \Omega$ , 设有一个解元  $SE(i, j, n)$  和一个守恒元  $CE(i, j, n)$  与之对应 (见图 2(b)), 其中解元  $SE(i, j, n)$  取图中六面体  $P'Q'R'S'S''R''Q''P''$  再加上中间平面  $EFGH$ , 而守恒元  $CE(i, j, n)$  则取为六面体  $EFGHH'G'F'E'$ .

利用与前面完全相同的推导方法可以得到如下与方程 (9) 对应的离散方程

$$(u_m)_{i,j}^n = \{Q_m^{(1)}(-\Delta x/2)\}_{i-1/2,j}^{n-1/2} + \{Q_m^{(1)}(\Delta x/2)\}_{i+1/2,j}^{n-1/2} + \{Q_m^{(2)}(\Delta y/2)\}_{i,j+1/2}^{n-1/2} + \{Q_m^{(2)}(-\Delta y/2)\}_{i,j-1/2}^{n-1/2} \quad (13)$$

其中

$$Q_m^{(1)}(\Delta x) = \{(2u_m - \Delta x \cdot u_{mx}) - \Delta t \cdot [g_{my}/2 + (4f_m - \Delta x \cdot f_{mx} + \Delta t \cdot f_{mt})/\Delta x]\}/8$$

$$Q_m^{(2)}(\Delta y) = \{(2u_m - \Delta y \cdot u_{my}) - \Delta t \cdot [f_{mx}/2 + (4g_m - \Delta y \cdot g_{my} + \Delta t \cdot g_{mt})/\Delta x]\}/8$$

同样地, 令  $u_m^*$  在两个相邻不同时间半层的解元交接点  $E, F, G$  和  $H$  处连续, 便得到:

$$(u_{mx})_{i,j}^n = [(u_{mx}^+)_{i,j}^n + (u_{mx}^-)_{i,j}^n]/2, \quad (u_{my})_{i,j}^n = [(u_{my}^+)_{i,j}^n + (u_{my}^-)_{i,j}^n]/2 \quad (14)$$

或

$$(u_{mx})_{i,j}^n = W((u_{mx}^-)_{i,j}^n, (u_{mx}^+)_{i,j}^n, \alpha), \quad (u_{my})_{i,j}^n = W((u_{my}^-)_{i,j}^n, (u_{my}^+)_{i,j}^n, \alpha) \quad (14)$$

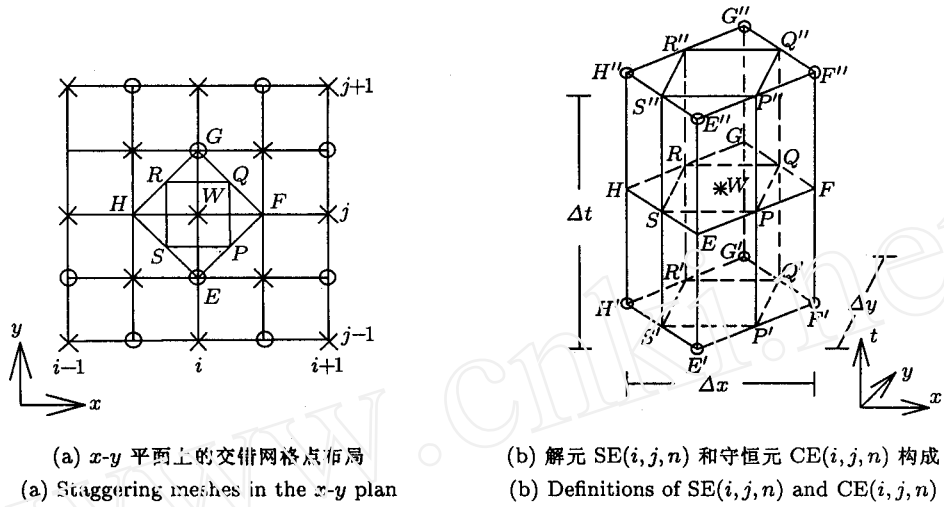


图 2  
Fig.2

其中

$$(u_{mx}^{\pm})_{i,j}^n = \pm [(u_m)_{i\pm 1/2,j}^n - (u_m)_{i,j}^n] / (\Delta x / 2), \quad (u_{my}^{\pm})_{i,j}^n = \pm [(u'_m)_{i,j\pm 1/2}^n - (u_m)_{i,j}^n] / (\Delta y / 2)$$

$$(u'_m)_{i\pm 1/2,j}^n = \{u_m + \Delta t \cdot u_{mt} / 2\}_{i\pm 1/2,j}^{n-1/2}, \quad (u'_m)_{i,j\pm 1/2}^n = \{u_m + \Delta t \cdot u_{mt} / 2\}_{i,j\pm 1/2}^{n-1/2}$$

式 (13) 和 (14) 就是在第二种守恒元和解元划分下的二维 Euler 方程时 - 空守恒格式。

这里给出的两种划分方法各有优缺点，第一种划分方法的网格点布局比较简单，而第二种划分方法得到的格式更为简单，它是一维格式的自然推广，而且很容易进一步推广到三维情形。从多个实际流动问题的计算结果来看，两种划分方法下得到的计算结果相差不大。若在式 (3)~(5) 中采用二阶台劳展开式来进行逼近，便可以得到相应于二阶台劳展开式的时 - 空守恒格式，限于篇幅这里不一一列出。

由于这里把流场变量及其关于空间方向的偏导数都作为独立变量来同时进行求解，所以它更利于边界条件的精确履行。在后面的算例中，对超音速出口边界采用了简单的外推方法，而在固壁边界上则采用的是无粘反射边界条件。从后面的算例结果不难看出，即使采用这么简单的边界处理方法，仍能得到较好的计算结果。

## 2 数值结果

这里应用本文格式对三个二维流动问题进行了检验计算。

**算例 1** 是一个由圆柱型喷管产生的冲击波问题，为了检验本文格式的有效性及稳定性，这里在二维笛卡尔坐标系下进行求解，其计算域、初始条件及边界条件与文 [5] 相同。网点数取为  $161 \times 121$ ,  $\Delta t = 0.0025$ , 图 3 是应用本文二维格式得到的某个时刻的压力等值线图 (由于其对称性，文中只给出了其上半部分的计算结果)。该结果与文 [5] 中给出的实验结果符合很好，且无需局部网格加密和特殊的人工限制技术。

**算例 2** 是一个激波绕射问题 [5] (case I), 其计算区域为  $0 \leq x, y \leq 3.6$ ,  $t = 0$  时刻初始激波

( $M_s = 1.3$ ) 位置为  $x = 0$ , 网点数为  $145 \times 73$ ,  $\Delta t = 0.01$ . 图 4 是应用本文二维 Euler 方程格式得到的密度等值线图 ( $t = 1.815$ ).

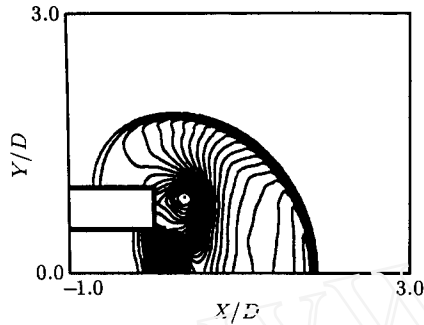


图 3 喷管流问题的等压力线图 ( $t = 0.4937$  ms)

Fig.3 Pressure contours for blast wave problems ( $t = 0.4937$  ms)

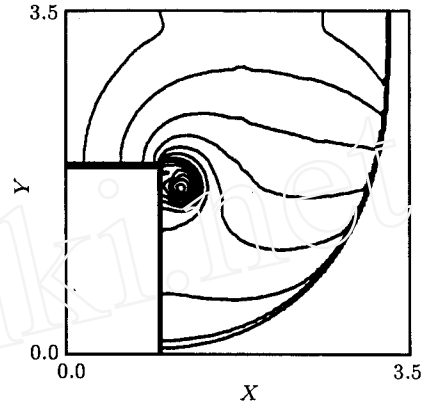


图 4 激波绕射问题等密度线图 (case I,  $t = 1.815$ )  
Fig.4 Density contours for shock wave diffraction around  $90^\circ$  corner (case I,  $t = 1.815$ )

算例 3 也是一个激波绕射问题 (case II). 其计算区域为  $0 \leq x \leq 4.7$ ,  $0 \leq y \leq 3.6$ ,  $t = 0$  时刻初始激波 ( $M_s = 2.4$ ) 位置为  $x = 0$ , 这里网点数为  $189 \times 73$ ,  $\Delta t = 0.01$ , 图 5 是应用本文格式得到的密度等值线图 ( $t = 0.8725$ ).

应用本文二维 Euler 方程格式得到的计算结果与实验结果<sup>[5]</sup> 进行比较表明它们之间符合很好, 同时本文格式还具有简单、实用, 计算量小, 计算精度高, 通用性好, 对激波等间断的分辨率高等突出优点, 是一种性能优良的数值方法, 具有非常广阔的发展前景.

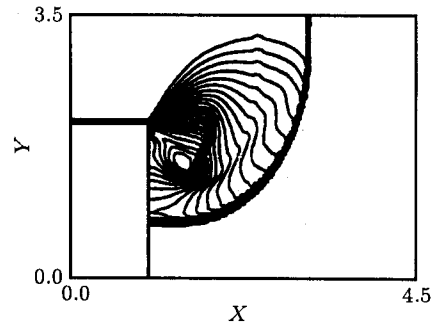


图 5 激波绕射问题等密度线图 (case II,  $t = 0.8725$ )  
Fig.5 Density contours for shock wave diffraction around  $90^\circ$  corner (case II,  $t = 0.8725$ )

## 参 考 文 献

- 1 Chang SC. The method of space-time conservation element and solution element—A new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 1995, 119: 295~324
- 2 张增产, 沈孟育. 改进的时 - 空守恒元和解元方法. 清华大学学报 (自然科学版), 1997, 37(8): 65~68 (Zhang ZC, Shen MY. Improved schemes of space-time conservation element and solution element. *J of Tsinghua University (Sci & Tech)*, 1997, 37(8): 65~68 (in Chinese))
- 3 Zhang ZC, Shen MY. New approach to obtain space-time conservation schemes. *Chinese Journal of Aeronautics*, 1997, 10(2): 87~90
- 4 张增产. 一种改进的满足时 - 空守恒律的数值方法. 计算力学学报, 1997, 14 (增刊): 741~744 (Zhang ZC. A modified numerical method of space-time conservation. *Chinese J of Computational Mechanics*, 1997, 14(Special Issue): 741~744 (in Chinese))
- 5 Wang XY. Computational fluid dynamics based on the method of space-time conservation element and solution element. [Ph D Thesis]. Boulder: Univ of Colorado, 1995

## NEW SPACE-TIME CONSERVATION SCHEMES FOR SOLVING 2-D EULER EQUATIONS<sup>1)</sup>

Zhang Zengchan Shen Mengyu

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** The method of space-time conservation element and solution element (the CE/SE method, for short), developed by S.C. Chang<sup>[1]</sup>, is a new numerical method which differs from the well-established methods and has many nontraditional features. Firstly, space and time are unified and treated on the same footing, and by the introduction of conservation element and solution element, both local and global flux conservations in space and time instead of in space only are enforced. Secondly, a zigzagging marching strategy in the space-time domain is employed, such that flow information at each interface separating two conservation elements can be evaluated without interpolation or extrapolation. In particular, no Riemann solver is needed in calculating interfacial fluxes. Thirdly, The flow solution structure is not calculated through a reconstruction procedure. Instead, the gradients of flow variables are solved simultaneously as independent unknowns. Finally, no approximation techniques other than Taylor's series expansion, no characteristic-based techniques and no directional splitting (in multiple spatial dimensions) are employed in this method. So it is conceptually simple. It is capable of handling both continuous and discontinuous flows very well.

But, the CE/SE method will become very complicated when it is extended to multi-dimensional problems. It is also difficult if we try to improve its accuracy. So, the CE/SE method is improved by the author and a new constructing method is introduced. The resulting schemes not only have all the features which the CE/SE method has, but also are much simpler and easier to use. Especially it is very easy to be extended to high dimensional cases. In this paper, the 1-D schemes developed in authors' previous works are extended to two dimensional problems. Here, two different definitions of space-time conservation elements (CEs) and solution elements (SEs) are introduced and the corresponding space-time conservation schemes for solving 2-D Euler equations are derived. Numerical results of several typical flow problems show many advantages of the present schemes such as its robustness, high efficiency, high accuracy and high shock resolution.

**Key words** Euler equations, space-time conservation, conservation element and solution element, numerical method, shock resolution

---

Received 31 March 1997.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.