

# 网格与高精度差分计算问题<sup>1)</sup>

张涵信 吴超 宗文刚

(中国空气动力研究与发展中心, 四川绵阳 621000;  
国家计算流体力学实验室, 北京 100083)

**摘要** 研究 NS 方程差分求解时来流雷诺数、计算格式精度和计算网格之间的关系, 给出了判定空间三个方向上的粘性贡献在给定雷诺数、格式精度和网格下是否能够正确计入的估计方法. 指出在 NS 方程的二阶差分方法的数值模拟中, 由于物面法向采用了压缩网格技术, 物面附近的网格间距很小, 该方向上的粘性贡献可被计入. 但是如果流向和周向的网格较粗, 相应的差分方程中的粘性贡献可能落入截断误差相同的量级, 因此在精度上等于仍是求解略去流向和周向粘性项的薄层近似方程. 指出, 高阶精度的差分计算格式, 可以避免对网格要求苛刻的困难, 并进一步讨论了建立高阶精度格式的问题, 提出了建立高阶精度格式应该满足的原则: 耗散控制原则以及色散控制原则. 为了避免激波附近可能出现的微小非物理振荡, 建议发展混合高阶精度格式, 即在激波区, 采用网格自适应的 NND 格式, 在激波以外的区域, 采用按上述原则发展的高阶格式.

**关键词** NS 方程, 网格判则, 建立高精度格式的原则

## 引 言

随着计算机的快速发展和数值方法能力的迅速提高, 复杂外形绕流的 NS 方程数值模拟的研究工作越来越多. 在这些计算模拟工作中, 有的计算采用十万个网格点, 有的采用数百万个甚至上千万个网格点. 分析这些研究给出的结果大致可以得到以下结论: (1) 当用高阶格式求解时, 所需的网格点数比低阶格式要少; (2) 当用二阶精度格式求解时, 对于高 Reynolds 流动, 在物体的迎风区, 粗网格的结果和实验值尚能接近, 但对于背风、拐角等具有分离、旋涡和强烈压缩或膨胀的流动区域, 其粗网格的结果和实验相差甚远<sup>[1]</sup>; (3) 细网格可给出与粗网格完全不同的旋涡和分离结构<sup>[2]</sup>. 这些情况给我们提出如下问题:

- 1) 当用二阶格式求解复杂外形绕流的 NS 方程时, 应该如何选择网格点数才能获得满意的结果?
- 2) 粗网格的数值模拟, 在多大程度和多大范围内能反应粘性的效应? 其机理和规律是什么?
- 3) 对于高阶精度的差分格式, 为什么网格点的数目可以放松?
- 4) 对于有激波的流场, 如何建立高阶精度的差分格式?

本文目的就是探讨以上问题. 不包括引言, 本文共分 4 节. 第 1 节讨论网格数与差分格式精度的关系, 这里我们提出了确定网格数的估算关系, 并阐明了网格点数控制粘性影响的机制. 第 2 节讨论了建立高阶格式的原则, 这些原则可以帮助我们选择和分析各种高阶格式. 第 3 节是前两节结果的应用, 第 4 节是简单的结论.

1999-03-22 收到第一稿, 1999-05-07 收到修改稿.

1) 谨以此文纪念郭永怀院士 90 周年诞辰.

## 1 网格点数和格式精度的关系

三维流动无量纲化的 NS 方程可写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \quad (1)$$

这里  $x, y, z$  分别表示流向、周向和物面法向的坐标, 并为了简单, 我们略去了无量纲化的方法和方程 (1) 中各项和各个符号意义的说明<sup>[3]</sup>,  $Re_L$  是以物体长度  $L$  为特征长度的 Reynolds 数.

如果采用  $m$  阶精度的差分格式求解方程 (1), 与  $m$  阶精度的差分格式等价的修正方程是

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{Re_L} \left( \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) + O(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m, \dots) \quad (2)$$

式中  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , 表示网格间距,  $O(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m, \dots)$  表示截断误差项, 它们是  $m$  阶以上的小量. (2) 式可进一步被写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\Delta x^\alpha}{Re_L \Delta x^\alpha} \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\Delta y^\beta}{Re_L \Delta y^\beta} \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\Delta z^\gamma}{Re_L \Delta z^\gamma} \frac{\partial H_v}{\partial z} + \\ O(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

选择 (3) 中的  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$ , 使其满足

$$\alpha = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta x}, \quad \beta = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta y}, \quad \gamma = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta z} \quad (4)$$

于是:  $Re_L \Delta x^\alpha = 1, Re_L \Delta y^\beta = 1, Re_L \Delta z^\gamma = 1$ . 则 (3) 式进一步可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \Delta x^\alpha \frac{\partial F_v}{\partial x} + \Delta y^\beta \frac{\partial G_v}{\partial y} + \Delta z^\gamma \frac{\partial H_v}{\partial z} + \\ O(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m, \dots) \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式指出, 对于高雷诺数流动, 除非  $\frac{\partial F_v}{\partial x}, \frac{\partial G_v}{\partial y}, \frac{\partial H_v}{\partial z}$  很大, 粘性项的贡献是比较小的. 要用差分方法正确计算这些小量项的贡献, 必须要求截断误差项比粘性项的贡献要小很多. 这表明: 如果所采用的网格和计算格式使  $\alpha > m$ , 则  $x$  方向原本小的粘性项的贡献被落入截断误差范围, 同样如果  $\beta > m$  或者  $\gamma > m$  时, 则所用网格和差分格式使  $y$  方向或  $z$  方向原本小的粘性项的贡献被落入截断误差范围. 只有当  $\alpha, \beta, \gamma$  分别取值小于或远小于  $m$  时, 所采用网格和差分格式才能比较正确地计入各方向的粘性贡献. 这也进一步表明, 当 (4) 中的  $\alpha, \beta, \gamma$  分别取值  $m$  时, (4) 式就可以给出  $x, y, z$  方向的临界网格间距  $\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta z^*$ , 其意义是: 当实际采用的计算网格  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  分别小于或远小于临界网格间距时,  $x, y, z$  方向的粘性效应就能被正确计入; 否则, 如果某方向所用的网格间距大于该临界网格值时, 则该方向的粘性效应可能就落入截断误差的范围.

在很多采用二阶差分格式求解 NS 方程的文献中,  $x, y$  方向的网格没有达到临界值的要求. 因为  $z$  方向的网格, 在物面附近采用了压缩技术, 在这种情况下, 于物面附近, 相应的

$\gamma < m = 2$ , 因此物面附近的粘性效应能够被计入. 但是在  $x, y$  方向, 由于网格基本是等距的, 相应的  $\alpha, \beta$  都大于  $m = 2$ , 因此这些文献表面上是求解完全的 NS 方程, 而事实上, 其精度仅相当于薄层近似方程的求解. 有些文献,  $x$  方向的网格数不满足要求, 但  $y, z$  方向满足, 此时相当于求解抛物化 NS 方程.

鉴于二阶格式求解 NS 方程时对网格要求的上述困难, 采用高阶格式, 可以解决这个矛盾, 因此发展高阶精度的差分格式是很有意义的.

## 2 建立高阶格式的基本原则

在利用高阶格式求解 NS 方程时, 粘性项采用高阶中心格式是适宜的, 其主要困难是如何妥善处理无粘项, 特别是对于有激波的情况, 应能光滑和狭窄捕捉激波. 为此我们研究无粘流动的计算格式, 并且为了简单, 从一维问题出发来讨论建立高阶精度格式的原则.

对于一维无粘流动, 其连续区的流动可用如下 Euler 方程来描述

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{A}$  是  $F$  的 Jacobian 矩阵. 下面讨论建立高阶格式的原则.

事实上, 由于矩阵  $\mathbf{A}$  可写成

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} \quad (7)$$

这里  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  是  $\mathbf{A}$  的特征对角矩阵,  $\lambda_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) 是其特征值,  $\mathbf{S}$  是左特征向量矩阵. 将此式代入 (6) 后并左乘矩阵  $\mathbf{S}$ , 于是得到

$$\mathbf{S} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

引入新的向量  $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ , 使其满足

$$d\mathbf{W} = \mathbf{S} dU \quad (9)$$

引入  $u = w^{(l)}$ ,  $a = \lambda_l$ , 由 (9) 式, 我们可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

将此式用于网格节点  $j$ , 它可给出

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j + \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = 0$$

假设采用高阶精度的差分格式离散  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j$  就可获得一个相应的半离散化的差分方程. 与此差分方程完全等价的修正方程式是

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j + \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = \sum v_n \left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_j \quad (11)$$

式中  $v_n$  是差分方程截断误差项的系数.

## 2.1 耗散控制原则

设  $u_0$  是差分方程 (11) 的真解. 当用数值方法求解差分方程 (11) 时, 由于不可避免地要引入计算误差  $\delta(x, t)$ , 所以差分方程的数值解是  $u = u_0 + \delta$ , 因为  $u, u_0$  均满足方程 (11), 因此  $\delta$  满足的方程是

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_j + a\left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right)_j = \sum v_n \left(\frac{\partial^n \delta}{\partial x^n}\right)_j \quad (12)$$

设在初始时刻  $t = 0$ , 误差的分布是

$$\delta = \delta_0 = Ae^{ikx} \quad (13)$$

这里  $k$  是误差的波数,  $A$  是初始误差的振幅, 由 (12),  $t > 0$  时, 可以给出

$$\delta = Ae^{\alpha t} e^{ik[x - (a - \beta)t]} \quad (14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sum_m (-1)^m v_{2m} k^{2m} \\ \beta &= \sum_m (-1)^m v_{2m+1} k^{2m} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

显然,  $Ae^{\alpha t}$  代表误差振幅随时间的变化, 一个好的差分格式, 应该是其误差随时间而减小的, 即满足稳定性的要求. 这就给出

$$\alpha = \sum (-1)^m v_{2m} k^{2m} < 0 \quad (W) \quad (16a)$$

这里 (W) 表示在整个连续区均应满足. 如果仅考虑首项, 该式给出

$$(-1)^m v_{2m} < 0 \quad (W) \quad (16b)$$

我们称 (16a) 或 (16b) 为建立差分格式的耗散控制原则或稳定性原则.

## 2.2 色散控制原则

由 (14) 可以看出,  $(a - \beta)$  是扰动误差的传播速度, 因为  $a$  是原始 Euler 方程的扰动传播速度, 所以  $\beta$  是原始扰动速度的修正, 由于它取决于修正方程式中的色散项, 所以我们称之为色散波的修正. 为了使连续区的差分解, 在激波区不产生非物理的波动, 我们要求激波两方扰动误差的传播方向应该向激波会聚, 这就像真实物理激波为满足熵增条件所提出的要求一样. 于是我们得到

$$\sum (-1)^m v_{2m+1} k^{2m} \begin{cases} < 0 & \text{(L)} \\ > 0 & \text{(R)} \end{cases} \quad (17a)$$

这里 (L) 表示激波的左方, (R) 表示激波的右方. 如果仅考虑首项, 可以得到

$$(-1)^m v_{2m+1} \begin{cases} < 0 & \text{(L)} \\ > 0 & \text{(R)} \end{cases} \quad (17b)$$

我们称 (17a) 或 (17b) 为色散波控制条件.

剩下一个问题是激波区如何自动识别. 在文献 [6] 中我们曾经提出, 可利用以下关系

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j \begin{cases} > 0 & (L) \\ < 0 & (R) \end{cases} \quad (18)$$

来识别激波的左方 (L) 和右方 (R), 这里  $f$  是通量  $F$  的分量. 由于

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j &= \frac{1}{\Delta x} (\Delta f_{j+1/2} + \Delta f_{j-1/2}) + \dots \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j &= \frac{1}{\Delta x} (\Delta f_{j+1/2} - \Delta f_{j-1/2}) + \dots \end{aligned}$$

所以, (18) 亦可近似写成

$$(\Delta f_{j+1/2})^2 - (\Delta f_{j-1/2})^2 \begin{cases} > 0 & (L) \\ < 0 & (R) \end{cases}$$

该式表明, 在激波的左方 (L),  $|\Delta f_{j-1/2}| < |\Delta f_{j+1/2}|$ ; 在激波的右方 (R),  $|\Delta f_{j+3/2}| < |\Delta f_{j+1/2}|$ . 这样, 关于激波区, 就可以用以下条件判断, 即当出现

$$\begin{aligned} |\Delta f_{j-1/2}| &< |\Delta f_{j+1/2}| > |\Delta f_{j+3/2}| \\ (\Delta f_{j+1/2})^2 - (\Delta f_{j-1/2})^2 &> 0 & (L) \\ (\Delta f_{j+3/2})^2 - (\Delta f_{j+1/2})^2 &< 0 & (R) \end{aligned}$$

时, 则认为出现了激波. 也可像文献 [7] 那样, 应用压力和密度的表达式来判断激波.

应用以上两个原则, 贺国宏、陈坚强、李沁、宗文刚等人分别建立了二阶、三阶以上高阶的紧致和非紧致差分格式. 他们的结果表明, 两个原则所给出的格式, 在二阶情况下, 就是 NND 格式<sup>[4]</sup>, 它能光滑地捕捉激波. 在高阶情况下, 激波以外的流场有很高的计算精度, 但在激波附近, 有微小的波动. 为了避免这种波动, 一个办法就是在激波区采用网格自适应的二阶 NND 格式, 在激波以外, 采用高阶格式. 这种混合算法, 能给出相当满意的计算结果.

### 3 算 例

#### 1) 跨声速翼型绕流

为了说明网格对粘性流动的影响, 我们研究了 NACA 0012 跨声速绕流. 来流条件为:  $M_\infty = 0.85$ ,  $Re = 10^5$ ,  $\alpha = 1.0^\circ$ . 计算采用了三层混合网格, 即物面附近为贴体结构网格, 稍离开物面为三角形非结构网格, 外边为矩形网格. 计算格式为二阶 NND 格式. 计算结果表明, 当网格点数不满足第 1 节提出的要求时 (20000 多个网格单元), 从物面拖出的剪切层并不明显

出现涡脱落现象，上翼面激波的位置比较靠后。但是，如果网格点数增加到满足第 1 节的要求时 (80000 多个网格单元)，在尾迹内出现周期性涡脱落运动，此时，上翼面的激波向前移动，并且也在作小振幅的周期振荡。图 1 是相应的计算结果。

## 2) 激波在突然放大二维管道内的传播

本算例考察运动 Mach 数  $M_s = 2.0$  的激波传入突然放大的二维管道。流动用 Euler 方程描述，这是一个包含激波反射、绕射和激波干扰的问题，流场内有复杂的波系。为了求解流场，我们采用第 2 节的原则构造了激波附近二阶、以外区域五阶的高阶紧致格式。为了比较，全场也分别用二阶 NND 格式及五阶紧致格式作了计算。计算结果表明，当采用相同的网格划分时，二阶 NND 格式可得到无虚假波动的结果，并能给出流场的主要结构，但激波稍宽，且激波外的某些流场细节，其分辨率不如全流场用五阶格式的计算结果好，但五阶格式在激波附近有微小的波动。采用混合格式，激波外的流场细节的分辨率几乎和全流场的五阶格式相同，且激波也变窄了。图 2 是混合五阶紧致格式计算给出的等密度线。

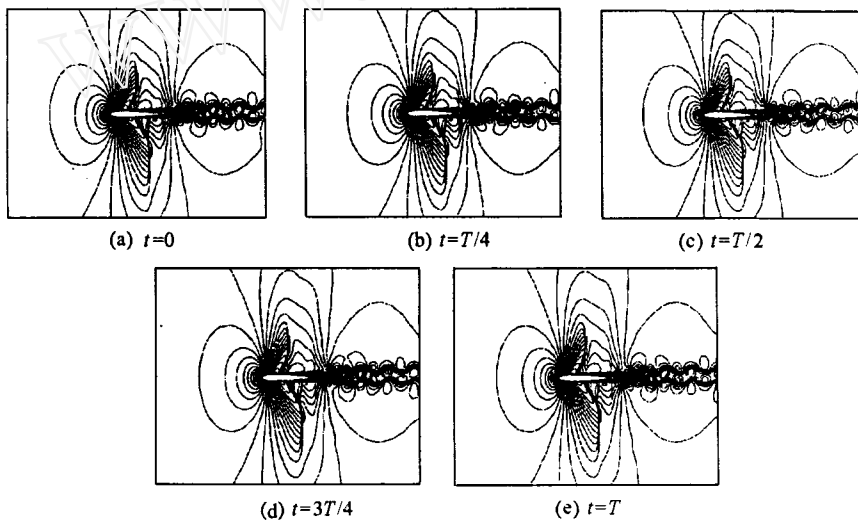


图 1 NACA 0012 翼型跨声速粘性绕流  $M_\infty = 0.85, Re = 10^5, \alpha = -1.0^\circ$  (马赫数等值线)  
Fig.1 Transonic viscous flow over NACA 0012 airfoil,  $M_\infty = 0.85, Re = 10^5, \alpha = -1.0^\circ$   
(Contour of Mach number)

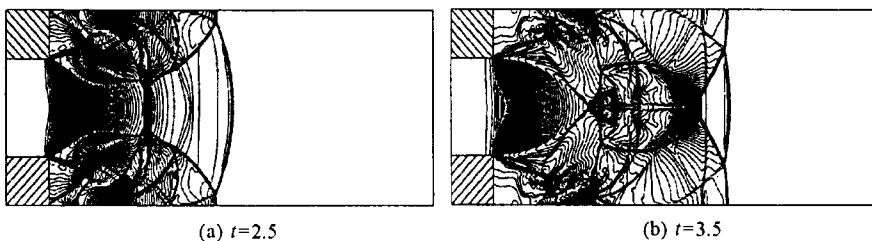


图 2 激波在突然扩张的二维管道内的传播 (等密度线)

Fig.2 A shock propagating in a sudden-expansion tube (Contour of density)

#### 4 简单的结论

根据以上的分析, 我们有以下结论:

1) 当差分格式的精度和计算网格已经给定后, 在求解 NS 方程时, 粘性项的贡献能否被正确计入, 可以用以下等式给出的  $\alpha, \beta, \gamma$  来判断

$$\alpha = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta x}, \quad \beta = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta y}, \quad \gamma = -\frac{\lg Re_L}{\lg \Delta z}$$

如果  $\alpha, \beta, \gamma$  均大于差分格式的精度  $m$ , 则原本较小的粘性项的贡献均可能属于截断误差的范围. 如果其中有一个大于  $m$ , 则它对应的方向上, 粘性项的贡献落入截断误差的范围. 只有当三者分别满足小于  $m$  的条件时, 粘性项的全部贡献才能被计入.

2) 由于在文献中, 物面法向方向的网格均采用了压缩技术, 即在物面附近有很密的网格, 因此这些求解 NS 方程的文献, 均计入了物面法向粘性项的贡献. 但是, 在  $x, y$  方向, 很多利用二阶格式求解的文献, 给出的网格数不满足上述要求, 在这种情况下, 可能仅相当于求解属于薄层近似的粘性方程. 如果  $y$  方向的网格数能满足要求, 而  $x$  方向不能满足, 则可能相当于求解抛物化 NS 方程. 如果采用三阶以上的高阶格式  $m \geq 3$ , 根据  $\alpha, \beta, \gamma$  小于  $m$  的条件, 与二阶格式相比,  $\alpha, \beta, \gamma$  可以取更大的值, 因此网格可以相对大些, 网格点数也就相应地少些. 这样可以放松对网格苛刻的要求.

3) 建立高阶精度的差分格式, 关键在于处理无粘项. 我们提出了建立差分格式的耗散控制原则和色散控制原则. 根据这两个原则, 可发展混合高阶格式, 即在连续区用高阶格式, 它满足耗散控制原则和色散控制条件; 在激波区, 用 NND 网格自适应的格式.

4) 给出的算例, 证实了求解 NS 方程时, 网格和计算格式必须匹配的关系. 证实了所提出建立高阶格式的原则是适用的.

#### 参 考 文 献

- 1 Olynick D, Tam T. Trajectory based validation of the shuttle heating environment. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1997, 34(2)
- 2 Moschetta JM et al. Detailed numerical investigation of supersonic cross flow separation. AIAA paper 94-2382, 1994
- 3 黎作武, 张涵信. 绕 Apollo 飞船的高超声速化学非平衡流动的数值模拟. *力学学报*, 1996, 28(1) (Li Zuowu, Zhang Hanxin. Numerical simulation of chemical nonequilibrium flow around Apollo airboat. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(1) (in Chinese))
- 4 Zhang Hanxin, Zhuang Fenggan. NND schemes and their applications to numerical simulation of two and three dimensional flows. *Advance in Applied Mechanics*, 1992, 29
- 5 张涵信, 李沁. 关于建立高阶格式的问题. *空气动力学学报*, 1998, 16(1) (Zhang Hanxin, Li Qing. Problems about establishing higher order schemes. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1998, 16(1) (in Chinese))
- 6 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. *空气动力学学报*, 1988, 6(2) (Zhang Hanxin. Non-oscillation, no free coefficients dissipative finite difference scheme. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1988, 6(2) (in Chinese))
- 7 Jameson A, Yoon S. Multigrid solution of the Euler equations using implicit schemes. AIAA paper 85-0293, 1995

PROBLEMS ABOUT GRID AND HIGH ORDER SCHEMES <sup>1)</sup>

Zhang Hanxin, Guo Chao, Zong Wengang

(Chinese Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, Sichuan 621000, China;  
National Laboratory of Computational Fluid Dynamics, Beijing 100083, China)

**Abstract** In this paper, the relation between the difference scheme and grid system is studied for solving Navier-Stokes equations with given Reynolds number. Only if this relation is satisfied in the directions  $x, y, z$  respectively, the Navier-Stokes equations can be simulated properly. In many references solving full Navier-Stokes equations with second order difference scheme, the grids in the direction  $z$  normal to the wall are fine enough since the clustering grid technique is used. The proposed relation is satisfied in this direction. However, the grids along the circumferential and main flow directions are not. Then the calculated viscous terms in these two directions will have the magnitude in the same order as the truncation error of the difference equations. In this case, it seems to solve full Navier-Stokes equations, in fact it only equivalent to solving the thin-layer approximation equations.

From the criteria of grid interval, less grid points are needed when a higher order difference scheme is used. Then this paper discussed further how to establish a higher order difference scheme. The principles are proposed to construct high order schemes for solving Navier-Stokes equations, which are related to suppressing non-physical oscillations, maintaining computational stability and capturing the shock wave narrowly and sharply. Based on these principles, hybrid schemes are presented, which are NND schemes in the shock wave region and higher order difference schemes established according to the above principles in the whole region except the shocks.

**Key words** Navier-Stokes equations, criteria of grid, principles on establishing high order schemes

---

Received 22 March 1999, revised 7 May 1999.

1) In memory of academician Kuo Yonghuai's 90 anniversary.