

非均匀复合材料的动态热弹性断裂力学分析

王保林 杜善义 韩杰才

(哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘要 对非均匀复合材料的动态热弹性断裂力学问题进行了研究, 假设材料参数沿厚度方向为变化的, 沿该方向将复合材料划分为许多单层, 取每一单层材料参数为常数, 应用 Fourier 变换法, 在 Laplace 域内推导出了控制问题的奇异积分方程组, 给出了热应力强度因子的表达式, 然后利用 Laplace 数值反演, 得出了裂纹尖端的动态应力强度因子. 本文的方法具有以下特点: (1) 多个垂直于厚度方向的裂纹, (2) 材料可以为正交各向异性, (3) 考虑了惯性效应. 作为算例, 研究了带有两个裂纹的功能梯度结构, 分析了材料参数的变化对应力强度因子的影响.

关键词 非均匀复合材料, 功能梯度材料, 多裂纹, 动态热应力, 应力强度因子

引 言

近年来, 随着材料科学与技术的进步, 非均匀复合材料引起了人们越来越多的注意, 一个重要的例子就是功能梯度材料的出现, 这类材料一般由两种物理性质完全不同的材料复合而成, 各组份材料的体积含量在空间位置上是连续变化的, 因而其复合材料的热物性参数是空间位置的函数. 非均匀复合材料的另一个例子是复合材料层合板以及薄膜-基底结构等层状介质, 虽然各单层材料是均匀的, 但是由大量材料参数互不相同的单层叠合而成的层状介质在厚度方向仍表现出很强的不均匀性.

在进行非均匀复合材料的设计时, 需要处理断裂破坏这一重要问题, 这是因为在材料成型以及随后的使用过程中都有可能出现大量的微裂纹, 这些微裂纹的扩展及合并会进一步产生一些主裂纹, 由于材料参数的非均匀性, 使得描述问题的控制方程为非线性的, 必须作一些简化才能求解, 对于热物性参数沿空间位置为连续变化的功能梯度材料, 通常是将其假设为坐标方向的指数函数, 由此得出的控制方程仍为常系数, 可以用 Fourier 变换法化为奇异积分方程, 比如 Erdogan 等人^[1]对稳态热载下平行于梯度方向的裂纹的断裂力学分析, Jin 等人^[2,3]对垂直于梯度方向的裂纹的热应力分析, 以及 Nemat-Alla^[4]对热膨胀系数具有二维不均匀性的介质的边缘裂纹问题的研究, 实际分析时, 还可以把材料参数假设为坐标的幂函数, 这方面的工作有 Hata^[5]对半无限体的热应力分析. 上述文献考虑的都是稳态热载情况, Jin 等人在文献 [6] 中研究了含单个裂纹的功能梯度材料板的瞬态热应力问题, 同样将材料参数假设为厚度方向 (y 方向) 的指数函数的形式, 裂纹面垂直于梯度方向, 分析发现通过适当的选择材料参数的变化方式可以有效地降低动态热应力强度因子.

现有的文献对非均匀复合材料的断裂力学分析存在几个主要问题, 一是对于材料参数连续变化的功能梯度材料, 必须将其假设为坐标方向的指数函数而且不同的参数都按照相同的规律

1997-03-09 收到第一稿, 1998-07-15 收到修改稿.

变化，这种近似离实际情况相差甚远；二是对层状介质，只能考虑层数较少的情况，如果层数较多，则必须将开裂层以外的各层用一等效单层代替，当裂纹长度与板厚相比不是很小时，这样处理会带来很大的误差；三是仅研究单个裂纹的情形，显然，研究多裂纹问题更加具有实际意义。在本文中，我们将非均匀材料沿厚度方向划分为许多单层，假设每一单层材料参数为常数，利用 Laplace 变换及 Fourier 变换求解各单层的控制微分方程，推导并求解了控制问题的奇异积分方程组，最后通过一个功能梯度结构的数值算例，阐明本文方法的适应性。

1 问题的描述，基本方程

图 1 所示的非均匀复合材料，水平方向尺寸为无限大， (x, y, z) 为总体坐标系，材料参数沿厚度方向 (y 方向) 为变化的，将该复合材料沿厚度方向划分为 N 个单层 (对于层状介质，还可以将各单层进一步细划)，各单层的材料参数为常数并取其形心处的值，弹性主轴平行于 x 轴和 y 轴，密度为 ρ_J ，各层的厚度为 h_J ，总厚度为 h (在本文中，以下标 J 代表层号 $1, 2, \dots, N$ ，以下标 j 代表第 $J+1$ 层和第 J 层之间的界面号)，对每一单层建立局部坐标系 (x_J, y_J, z_J) ，其原点位于该单层的底面，局部坐标系与总体坐标系的关系为

$$x_J = x, \quad y_J = y - \sum_{L=1}^{J-1} h_L, \quad z_J = z \tag{1.1}$$

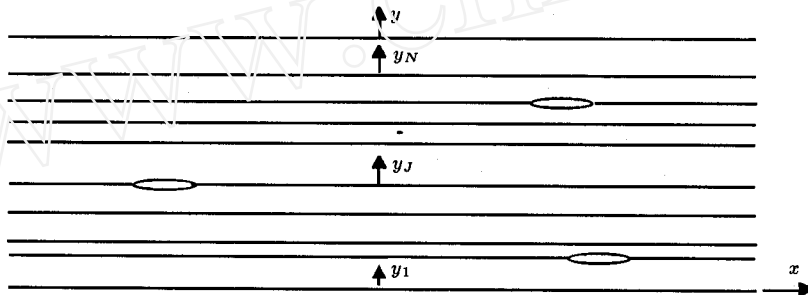


图 1 非均匀复合材料的坐标系
Fig.1 Geometry and coordinate of non-homogeneous composite

记相邻两单层的界面热流 $(q_y)_j$ 为 $q_j(x, t)$ ，界面正应力 $(\sigma_y)_j$ 为 $\sigma_j(x, t)$ ，剪应力 $(\tau_{xy})_j$ 为 $\tau_j(x, t)$ ，假设相邻两单层为理想粘接或有一贯穿 z 向的界面裂纹，其长度为 $2a_j$ ，中心位于 $x_j = c_j$ 处， N 个单层一共 $N-1$ 个界面，最多可以有 $N-1$ 个裂纹。取初始温度、位移和速度以及无穷远处温度、热流、位移和速度都为零，边界条件为

- 1) 沿 y 方向，介质上表面及下表面分别作用热流 $q_N(x, t)$ 和热流 $q_0(x, t)$ 。
- 2) 裂纹面作用热流及应力 (要求其满足 Laplace 变换的条件)

$$q_j(x, t) = q_{0j}(x, t), \quad \sigma_j(x, t) = \sigma_{0j}(x, t), \quad \tau_j(x, t) = \tau_{0j}(x, t), \quad c_j - a_j < x < c_j + a_j \tag{1.2}$$

由于仅考虑平面导热问题且材料为正交各向异性，各单层热流场为

$$(q_x(x, y, t))_J = -(k_x)_J \frac{\partial T_J(x, y, t)}{\partial x}, \quad (q_y(x, y, t))_J = -(k_y)_J \frac{\partial T_J(x, y, t)}{\partial y} \tag{1.3}$$

温度场满足下列微分方程

$$(k_x)_J \frac{\partial^2 T_J}{\partial x^2} + (k_y)_J \frac{\partial^2 T_J}{\partial y_J^2} = \rho_J (c_\nu)_J \frac{\partial T_J}{\partial t} \quad (1.4)$$

各单层不为零的位移场和应力场为

$$(U_x)_J = u_J(x, y_J, t), \quad (U_y)_J = \nu_J(x, y_J, t) \quad (1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xJ} &= (C_{11})_J \frac{\partial u_J}{\partial x} + (C_{12})_J \frac{\partial \nu_J}{\partial y_J} - (\beta_x)_J T_J \\ \sigma_{yJ} &= (C_{12})_J \frac{\partial u_J}{\partial x} + (C_{22})_J \frac{\partial \nu_J}{\partial y_J} - (\beta_y)_J T_J \\ \tau_{xyJ} &= (C_{66})_J \left(\frac{\partial u_J}{\partial y_J} + \frac{\partial \nu_J}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

小变形情况下各单层的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} (C_{11})_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial x^2} + (C_{66})_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial y_J^2} + (C_{12} + C_{66})_J \frac{\partial^2 \nu_J}{\partial x \partial y_J} &= \rho_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial t^2} + (\beta_x)_J \frac{\partial T_J}{\partial x} \\ (C_{66})_J \frac{\partial^2 \nu_J}{\partial x^2} + (C_{22})_J \frac{\partial^2 \nu_J}{\partial y_J^2} + (C_{12} + C_{66})_J \frac{\partial^2 u_J}{\partial x \partial y_J} &= \rho_J \frac{\partial^2 \nu_J}{\partial t^2} + (\beta_y)_J \frac{\partial T_J}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

2 温度场

2.1 热传导方程的解

定义无量纲参数: $\bar{x} = x/h$, $\bar{y}_J = y_J/h$, $\bar{h}_J = h_J/h$, $t_{0J} = h^2 \rho_J (c_\nu)_J / (k_y)_J$ 以及 $k_j = 2 / (1/\sqrt{(k_x k_y)_J} + 1/\sqrt{(k_x k_y)_{J+1}})$, 对时间 t 作 Laplace 变换, 再对 x 作 Fourier 变换, 可得 Laplace 域内热传导方程 (1.4) 的解为

$$T_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_{0J} e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} + B_{0J} e^{|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J}] e^{-is \bar{x}} ds \quad (2.1)$$

其中

$$\lambda_{0J} = \sqrt{(k_x)_J / (k_y)_J + p t_{0J} / s^2} \quad (2.2)$$

在本文中, 上标 * 代表相应变量的 Laplace 变换, p 为时间 t 的变换变量, $A_{0J}(s, p)$, $B_{0J}(s, p)$ 为待求未知参数, 由 (2.1) 以及本构方程 (1.3) 可得到各单层热流 $(q_y^*)_J$ 在该层底面 ($\bar{y}_J = 0$) 的值 $q_{j-1}^*(\bar{x}, p)$ 及顶面 ($\bar{y}_J = \bar{h}_J$) 的值 $q_j^*(\bar{x}, p)$, 再利用 Fourier 逆变换解出用 $q_{j-1}^*(\bar{x}, p)$ 和 $q_j^*(\bar{x}, p)$ 表示的 $A_{0J}(s, p)$, $B_{0J}(s, p)$ 并代入 (2.1) 可求得第 J 个单层位于 $(\bar{x}, \bar{y}_J) = (\bar{\tau}, \bar{y}_J)$ 处的点的温度为

$$\begin{aligned} T_J^*(\bar{\tau}, \bar{y}_J, p) &= -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is \bar{\tau}} ds \frac{R_J(s, p)}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} [(e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} + e^{|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J}) q_j^*(\bar{x}, p) - \\ &\quad (e^{-|s| \lambda_{0J} (\bar{h}_J - \bar{y}_J)} + e^{|s| \lambda_{0J} (\bar{h}_J - \bar{y}_J)}) q_{j-1}^*(\bar{x}, p)] e^{-is \bar{x}} d\bar{x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$R_J(s,p) = \frac{\text{sgn}(s)}{(k_y)_J \lambda_{0J} (e^{|s|\lambda_{0J}\bar{h}_J} - e^{-|s|\lambda_{0J}\bar{h}_J})} \tag{2.4}$$

2.2 奇异积分方程 (组) 的推导

引入辅助函数 $\phi_{0j}(\bar{x}, p)$ 定义为 Laplace 域内第 $J+1$ 个单层和第 J 个单层之间的界面温度差对 x 的偏微分, 即

$$\phi_{0j}(\bar{x}, p) = \frac{\partial T_{J+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{J+1} = 0, p)}{\partial x} - \frac{\partial T_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J = \bar{h}_J, p)}{\partial x} \tag{2.5}$$

根据 $\phi_{0j}(\bar{x}, t)$ 的定义式 (2.5) 以及 $T_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j, p)$ 的表达式 (2.3) 可得

$$\phi_{0j}(\bar{x}, p) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\bar{x}} ds \int_{-\infty}^{+\infty} [L_j q_{j-1}^*(\bar{x}, p) + M_j q_j^*(\bar{x}, p) + N_j q_{j+1}^*(\bar{x}, p)] e^{is\bar{x}} d\bar{x} \tag{2.6}$$

其中 $L_j(s, p)$, $M_j(s, p)$, $N_j(s, p)$ 的表达式如下

$$L_j(s, p) = -2R_J(s, p), \quad N_j(s, p) = -2R_{J+1}(s, p) \tag{2.7}$$

$$M_j(s, p) = \frac{(e^{|s|\lambda_{0(J+1)}\bar{h}_{J+1}} + e^{-|s|\lambda_{0(J+1)}\bar{h}_{J+1}})R_{J+1}(s, p) + (e^{|s|\lambda_{0J}\bar{h}_J} + e^{-|s|\lambda_{0J}\bar{h}_J})R_J(s, p)}{(e^{|s|\lambda_{0(J+1)}\bar{h}_{J+1}} + e^{-|s|\lambda_{0(J+1)}\bar{h}_{J+1}})R_{J+1}(s, p) + (e^{|s|\lambda_{0J}\bar{h}_J} + e^{-|s|\lambda_{0J}\bar{h}_J})R_J(s, p)} \tag{2.8}$$

为了表达各界面热流 $q_j^*(\bar{x}, p)$ 和 $\phi_{0j}(\bar{x}, p)$ 之间的关系, 定义下列向量

$$\{Q^*(\bar{x}, p)\} = [q_1^*(\bar{x}, p), \dots, q_{N-1}^*(\bar{x}, p)]^T \tag{2.9}$$

$$\{\Phi_0(s, p)\} = \left[\int_{\bar{c}_1 - \bar{a}_1}^{\bar{c}_1 + \bar{a}_1} \phi_{01}(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r}, \dots, \int_{\bar{c}_{N-1} - \bar{a}_{N-1}}^{\bar{c}_{N-1} + \bar{a}_{N-1}} \phi_{0(N-1)}(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r} \right]^T \tag{2.10}$$

利用 Fourier 变换以及 (2.9)~(2.10) 可以将 (2.6) 写成下列矩阵形式

$$-[D(s, p)] \int_{-\infty}^{+\infty} \{Q^*(\bar{x}, p)\} e^{is\bar{x}} d\bar{x} = \frac{1}{i} \{\Phi_0(s, p)\} + \{\Phi_a(s, p)\} \tag{2.11}$$

其中 $[D(s, p)]$ 为与 $L_j(s, p)$, $M_j(s, p)$ 及 $N_j(s, p)$ 有关的三对角矩阵

$$D(s, p) = \begin{bmatrix} M_1 & N_1 & & & & & \\ L_2 & M_2 & N_2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & L_{N-2} & M_{N-2} & N_{N-2} \\ & & & & & L_{N-1} & M_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$\{\Phi_a\}$ 为与边界条件有关的列阵, 并且仅第一个及最后一个元素不为零, 它们分别为

$$\Phi_{1a}(s, p) = L_1(s, p) \int_{-\infty}^{+\infty} q_0^*(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r}, \quad \Phi_{(N-1)a}(s, p) = N_{N-1}(s, p) \int_{-\infty}^{+\infty} q_N^*(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r} \tag{2.13}$$

记 $[D(s, p)]$ 的逆矩阵为 $[K(s, p)]$, 对 (2.11) 式进行 Fourier 逆变换并写为分量的形式得

$$-q_j^*(\bar{x}, p) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \phi_{0k}(\bar{r}, p) d\bar{r} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{jk} e^{is(\bar{r} - \bar{x})} ds + q_{aj}^*(\bar{x}, p) \tag{2.14}$$



其中 $K_{jk}(s, p)$ 为 $[K(s, p)]$ 中第 j 行第 k 列元素, $q_{a_j}^*(\bar{x}, p)$ 为

$$q_{a_j}^*(\bar{x}, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (K_{j1} \ K_{j(N-1)}) \{ \Phi_{1a} \ \Phi_{(N-1)a} \}^T e^{-is\bar{x}} ds \quad (2.15)$$

由于 $[D(s, p)]$ 中各元素均为 s 的奇函数, 而且当 $s \rightarrow \pm\infty$ 时, $[D(s, p)]$ 仅对角线上的元素为 $2\text{sgn}(s)/\kappa_j$, 其它元素均为零, 因此 $[K(s, p)]$ 中各元素也为 s 的奇函数, 并且 $[K(s, p)]$ 在 $s \rightarrow \pm\infty$ 时的渐近值 $K_{jk}(\infty, p)$ 为 $\text{sgn}(s)\delta_{jk}\kappa_j/2$.

定义 $K'_{jk}(s, p) = K_{jk}(s, p) - K_{jk}(\infty, p)$, 可进一步将 (2.14) 简化成

$$\begin{aligned} -q_j^*(\bar{x}, p) - q_{a_j}^*(\bar{x}, p) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \phi_{0k}(\bar{r}, p) d\bar{r} \int_0^{\infty} K'_{jk} \sin s(\bar{r} - \bar{x}) ds + \\ &\quad \frac{\kappa_j}{2\pi} \int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \frac{\phi_{0j}(\bar{r}, p)}{\bar{r} - \bar{x}} d\bar{r} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.3 奇异积分方程组的解

方程 (2.16) 对裂纹面内部以及裂纹面外部均成立, 对于裂纹面内部的情形, 上述方程成为具有简单柯西类型核 $1/(\bar{r} - \bar{x})$ 的奇异积分方程组, 因此, 裂纹尖端热流具有标准的平方根奇异性, 按照积分方程的理论, $\phi_{0j}(\bar{r}, p)$ 的解可以表示为

$$\phi_{0j}(\bar{a}_j \bar{r}_j + \bar{c}_j, p) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}(p) T_m(\bar{r}_j) / \sqrt{1 - \bar{r}_j^2}, \quad |\bar{r}_j| < 1 \quad (2.17)$$

其中 $\bar{r}_j = (\bar{r} - \bar{c}_j)/\bar{a}_j$, $T_m(\bar{r}_j)$ 为第一类切比雪夫 (Chebyshev) 幂级数, C_{jm} 为待求未知常数, 实际求解时, 只需截取级数的前 M 项, 将上式代入 (2.16) 后可用配点法或者加权残值法求解 [7].

以上推导对每一个界面均引入一个辅助函数, 对于没有裂纹的界面 (比如第 k 个面), 则该界面的辅助函数为零, 即 $C_{km}(p)$ 恒等于零 ($m = 1, 2, \dots, M$), 因此 (2.16) 中实际需要求解的方程个数等于裂纹的个数.

由 (2.17) 可求得裂纹上、下表面的温度差 $T_{j+1}^{*J}(\bar{x}, p)$ 为

$$T_{j+1}^{*J}(\bar{x}, p) = -a_j \sum_{n=1}^M C_{jn}(p) \frac{\sin(n \arccos \bar{x}_j)}{n}, \quad |\bar{x}_j| < 1 \quad (2.18)$$

其中 $\bar{x}_j = (\bar{x} - \bar{c}_j)/\bar{a}_j$, 由于裂纹尖端热流具有平方根奇异性, 仿照断裂力学中应力强度因子的定义, 裂纹左、右两端的热流强度因子分别为

裂纹左端

$$(K_q^*)_j = \left[\sqrt{2[(c_j - a_j) - x]} \right]_{x \rightarrow (c_j - a_j)^-} q_j^*(\bar{x}, p) = -\frac{\kappa_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}(p) \quad (2.19)$$

裂纹右端

$$(K_q^*)_j = \left[\sqrt{2[x - (c_j - a_j)]} \right]_{x \rightarrow (c_j + a_j)^+} q_j^*(\bar{x}, p) = \frac{\kappa_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}(p) \quad (2.20)$$

以上我们在 Laplace 变换域内推导了温度、热流、裂纹尖端热流强度因子等的表达式, 再利用 Laplace 数值反演即可求得这些参数的动态变化规律, 关于 Laplace 数值反演的方法, 有许多文献可以引用, 本文选用 Jin 和 Noda^[6] 在热弹性断裂动力学中使用的方法, 其基本思想是将被反演的参数展开为时间变量的 Jacobi 多项式, 通过调整 Jacobi 多项式的项数可获得稳定的数值反演结果.

3 热应力分析

3.1 运动方程的解

定义波速 $C_{aJ} = \sqrt{(C_{22})_J/\rho_J}$, $C_{bJ} = \sqrt{(C_{66})_J/\rho_J}$, 对时间 t 作 Laplace 变换, 再对 x 作 Fourier 变换, 可得 Laplace 域内运动方程 (1.7) 的解为

$$\left\{ \begin{array}{l} u_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p)/i \\ \nu_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) \end{array} \right\} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e_J] \begin{Bmatrix} A_{1J} \\ B_{1J} \\ A_{2J} \\ B_{2J} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds + \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} [e_{0J}] \begin{Bmatrix} A_{0J} \\ B_{0J} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds \quad (3.1)$$

上式反映了方程 (1.7) 与 (1.4) 的耦合解, 其中第一项代表不考虑温度变化时 (1.7) 式的齐次解, 第二项代表 (1.7) 式与温度变化相对应的特解, $A_{mJ}(z, p)$ 和 $B_{mJ}(s, p)$ 为待求未知参数 ($m = 1, 2$), $i = \sqrt{-1}$,

$$[e_J(\bar{y}_J, p, s)] = \begin{bmatrix} e^{-|s|\lambda_{1J}\bar{y}_J} & e^{|s|\lambda_{1J}\bar{y}_J} & e^{-|s|\lambda_{2J}\bar{y}_J} & e^{|s|\lambda_{2J}\bar{y}_J} \\ \eta_{1J}e^{-|s|\lambda_{1J}\bar{y}_J} & -\eta_{1J}e^{|s|\lambda_{1J}\bar{y}_J} & \eta_{2J}e^{-|s|\lambda_{2J}\bar{y}_J} & -\eta_{2J}e^{|s|\lambda_{2J}\bar{y}_J} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[e_{cJ}(\bar{y}_J, p, s)] = \begin{bmatrix} \zeta_{xJ}e^{-|s|\lambda_{0J}\bar{y}_J} & \zeta_{xJ}e^{|s|\lambda_{0J}\bar{y}_J} \\ -\text{sgn}(s)\zeta_{yJ}e^{-|s|\lambda_{0J}\bar{y}_J} & \text{sgn}(s)\zeta_{yJ}e^{|s|\lambda_{0J}\bar{y}_J} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

λ_{iJ} ($i = 1, 2$) 为下列特征方程的根

$$\lambda_{iJ}^4 - \left[\left(\frac{C_{11}C_{22} - 2C_{12}C_{66} - C_{12}^2}{C_{22}C_{66}} \right)_J + \left(\frac{ph}{sC_{aJ}} \right)^2 + \left(\frac{ph}{sC_{bJ}} \right)^2 \right] \lambda_{iJ}^2 + \left[\left(\frac{C_{11}}{C_{22}} \right)_J + \left(\frac{ph}{sC_{aJ}} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{ph}{sC_{bJ}} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.4)$$

η_{iJ} ($i = 1, 2$) 为

$$\eta_{iJ} = \text{sgn}(s) \frac{(C_{11})_J/(C_{66})_J + (ph/sC_{bJ})^2 - \lambda_{iJ}^2}{\lambda_{iJ}(1 + ((C_{12})_J/(C_{66})_J))} \quad (3.5)$$

ζ_{xJ} 及 ζ_{yJ} 为下列方程组的解

$$\left. \begin{array}{l} \left[\left(\frac{C_{11}}{C_{66}} \right)_J - \lambda_{0J}^2 + \left(\frac{ph}{sC_{bJ}} \right)^2 \right] \zeta_{xJ} + \left[\left(\frac{C_{12}}{C_{66}} \right)_J + 1 \right] \lambda_{0J} \zeta_{yJ} = \frac{\beta_{xJ}}{(C_{66})_J} \\ \left[\left(\frac{C_{12} + C_{66}}{C_{22}} \right)_J \right] \lambda_{0J} \zeta_{xJ} - \left[\left(\frac{C_{66}}{C_{22}} \right)_J - \lambda_{0J}^2 + \left(\frac{ph}{sC_{aJ}} \right)^2 \right] \zeta_{yJ} = \frac{\lambda_{0J} \beta_{yJ}}{(C_{22})_J} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

需要说明的是, 特征方程 (3.4) 的根具有实数、复数和纯虚数几种可能的情况, 当 (3.4) 的根为复数或纯虚数时, 仅 (3.2) 的形式需作适当的变动, 余下分析方法不变.

利用本构方程 (1.6) 可求得各单层正应力 $(\sigma_y^*)_J$ 以及剪应力 $(\tau_{xy}^*)_J$ 在该层顶面 $(\bar{y}_J = \bar{h}_J)$ 处的值 $\sigma_j^*(\bar{x}, p)$, $\tau_j^*(\bar{x}, p)$ 和底面 $(\bar{y}_J = 0)$ 处的值 $\sigma_{j-1}^*(\bar{x}, p)$, $\tau_{j-1}^*(\bar{x}, p)$ 为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ \tau_j^*(\bar{x}, p)/i \\ \sigma_{j-1}^*(\bar{x}, p) \\ \tau_{j-1}^*(\bar{x}, p)/i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s[K_J] \begin{Bmatrix} A_{1J} \\ B_{1J} \\ A_{2J} \\ B_{2J} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [K_{0J}] \begin{Bmatrix} A_{0J} \\ B_{0J} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds \quad (3.7)$$

其中 $[K_J(s, p)]$ 及 $[K_{0J}(s, p)]$ 为

$$[K_J] = \begin{bmatrix} ((C_{12})_J - \lambda_{1J}\eta_{1J}(C_{22})_J)e^{-|\lambda_{1J}\bar{h}_J} & ((C_{12})_J - \lambda_{1J}\eta_{1J}(C_{22})_J)e^{|\lambda_{1J}\bar{h}_J} \\ -\text{sgn}(s)(\lambda_{1J} + \eta_{1J})(C_{66})_J e^{-|\lambda_{1J}\bar{h}_J} & \text{sgn}(s)(\lambda_{1J} + \eta_{1J})(C_{66})_J e^{|\lambda_{1J}\bar{h}_J} \\ (C_{12})_J - \lambda_{1J}\eta_{1J}(C_{22})_J & (C_{12})_J - \lambda_{1J}\eta_{1J}(C_{22})_J \\ -\text{sgn}(s)(\lambda_{1J} + \eta_{1J})(C_{66})_J & \text{sgn}(s)(\lambda_{1J} + \eta_{1J})(C_{66})_J \\ ((C_{12})_J - \lambda_{2J}\eta_{2J}(C_{22})_J)e^{-|\lambda_{2J}\bar{h}_J} & ((C_{12})_J - \lambda_{2J}\eta_{2J}(C_{22})_J)e^{|\lambda_{2J}\bar{h}_J} \\ -\text{sgn}(s)(\lambda_{2J} + \eta_{2J})(C_{66})_J e^{-|\lambda_{2J}\bar{h}_J} & \text{sgn}(s)(\lambda_{2J} + \eta_{2J})(C_{66})_J e^{|\lambda_{2J}\bar{h}_J} \\ (C_{12})_J - \lambda_{2J}\eta_{2J}(C_{22})_J & (C_{12})_J - \lambda_{2J}\eta_{2J}(C_{22})_J \\ -\text{sgn}(s)(\lambda_{2J} + \eta_{2J})(C_{66})_J & \text{sgn}(s)(\lambda_{2J} + \eta_{2J})(C_{66})_J \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[K_{0J}] = \begin{bmatrix} (\zeta_{yJ}\lambda_{0J}(C_{22})_J + \zeta_{xJ}(C_{12})_J - (\beta_y)_J)e^{-|\lambda_{0J}\bar{h}_J} \\ -\text{sgn}(s)(\zeta_{xJ}\lambda_{0J} - \zeta_{yJ})(C_{66})_J e^{-|\lambda_{0J}\bar{h}_J} \\ (\zeta_{yJ}\lambda_{0J}(C_{22})_J + \zeta_{xJ}(C_{12})_J - (\beta_y)_J) \\ -\text{sgn}(s)(\zeta_{xJ}\lambda_{0J} - \zeta_{yJ})(C_{66})_J \\ (\zeta_{yJ}\lambda_{0J}(C_{22})_J + \zeta_{xJ}(C_{12})_J - (\beta_y)_J)e^{|\lambda_{0J}\bar{h}_J} \\ \text{sgn}(s)(\zeta_{xJ}\lambda_{0J} - \zeta_{yJ})(C_{66})_J e^{|\lambda_{0J}\bar{h}_J} \\ (\zeta_{yJ}\lambda_{0J}(C_{22})_J + \zeta_{xJ}(C_{12})_J - (\beta_y)_J) \\ \text{sgn}(s)(\zeta_{xJ}\lambda_{0J} - \zeta_{yJ})(C_{66})_J \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

记 $[K_J(s, p)]$ 的逆矩阵的前两列为 $[D_J^a(s, p)]$, 后两列为 $[D_J^b(s, p)]$, 利用 Fourier 变换可由 (3.7) 式解出 $A_{mJ}(s, p)$ 和 $B_{mJ}(s, p)$ ($m = 1, 2$) 并代入 (3.1) 可求得用界面应力表示的各单层位移为

$$\begin{Bmatrix} u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p)/i \\ v_j^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) \end{Bmatrix} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} ([e_{1J}]) \begin{Bmatrix} A_{0J} \\ B_{0J} \end{Bmatrix} e^{-is\bar{x}} ds + \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} [e_J] ([D_J^a] \quad [D_J^b]) \cdot \begin{Bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_j^* e^{is\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_j^*}{i} e^{is\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{j-1}^* e^{is\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_{j-1}^*}{i} e^{is\bar{x}} d\bar{x} \end{Bmatrix}^T e^{-is\bar{x}} ds \quad (3.10)$$

其中

$$[e_{1J}(\bar{y}_J, s, p)] = [e_{0J}(\bar{y}_J, s, p)] - [e_J(\bar{y}_J, s, p)] ([D_J^a] \quad [D_J^b]) [K_{0J}(s, p)] \quad (3.11)$$

3.2 奇异积分方程组的推导

引入位错密度函数 $\phi_{xj}(\bar{x}, p)$, $\phi_{yj}(\bar{x}, p)$ 定义为 Laplace 域内第 $J+1$ 个单层和第 J 个单层之间的界面位移差对 x 的偏微分. 根据这一定义以及 $u_j^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p)$, $\nu_j^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p)$ 的表达式 (3.10) 可得

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \phi_{xj}(\bar{r}, p)/i \\ \phi_{yj}(\bar{r}, p) \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ([L]_j \quad [M]_j \quad [N]_j) e^{-is\bar{r}} ds \cdot \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \{i\sigma_{j-1}^* \quad \tau_{j-1}^* \quad i\sigma_j^* \quad \tau_j^* \quad i\sigma_{j+1}^* \quad \tau_{j+1}^*\}^T e^{is\bar{x}} d\bar{x} - \\ &\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx} \\ \phi_{Ty} \end{matrix} \right\}_j e^{-is\bar{r}} ds \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} [L(s, p)]_j &= [e_J(\bar{h}_J, p)] [D_j^b(s, p)], \quad [N(s, p)]_j = -[e_{J+1}(0, p)] [D_{J+1}^a(s, p)] \\ [M(s, p)]_j &= [e_J(\bar{h}_J, p)] [D_j^a(s, p)] - [e_{J+1}(0, p)] [D_{J+1}^b(s, p)] \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx}(s, p) \\ \phi_{Ty}(s, p) \end{matrix} \right\}_j = [e_{1(J+1)}(0, s, p)] \left\{ \begin{matrix} A_{0(J+1)}(s, p) \\ B_{0(J+1)}(s, p) \end{matrix} \right\} - [e_{1J}(\bar{h}_J, s, p)] \left\{ \begin{matrix} A_{0J}(s, p) \\ B_{0J}(s, p) \end{matrix} \right\} \tag{3.14}$$

为了表达各界面应力 ($\sigma_j^*(\bar{x}, p)$, $\tau_j^*(\bar{x}, p)$) 和 ($\phi_{xj}^*(\bar{x}, p)$, $\phi_{yj}^*(\bar{x}, p)$) 之间的关系, 定义下列向量

$$\begin{aligned} \{\Phi(s, p)\} &= \left\{ \int_{c_1-a_1}^{\bar{c}_1+\bar{a}_1} \frac{\phi_{x1}}{i} e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad \int_{\bar{c}_1-\bar{a}_1}^{\bar{c}_1+\bar{a}_1} \phi_{y1} e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad \dots \right. \\ &\left. \int_{\bar{c}_{N-1}-\bar{a}_{N-1}}^{\bar{c}_{N-1}+\bar{a}_{N-1}} \frac{\phi_{x(N-1)}}{i} e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad \int_{\bar{c}_{N-1}-\bar{a}_{N-1}}^{\bar{c}_{N-1}+\bar{a}_{N-1}} \phi_{y(N-1)} e^{is\bar{r}} d\bar{r} \right\}^T \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\{\Sigma(\bar{x}, p)\} = \{i\sigma_1^* \quad \tau_1^* \quad \dots \quad i\sigma_{N-1}^* \quad \tau_{N-1}^*\}^T \tag{3.16}$$

$$\{\Phi_T(s, p)\} = \{(\phi_{Tx})_1 \quad (\phi_{Ty})_1 \quad \dots \quad (\phi_{Tx})_{N-1} \quad (\phi_{Ty})_{N-1}\}^T \tag{3.17}$$

利用材料上下表面应力为零的条件, 对 (3.12) 进行 Fourier 变换得

$$[D] \int_{-\infty}^{+\infty} \{\Sigma\} e^{isx} d\bar{x} = \{\Phi\} + i\{\Phi_T\} \tag{3.18}$$

其中, $[D(s, p)]$ 为与 $L_j(s, p)$, $M_j(s, p)$ 及 $N_j(s, p)$ 有关的三对角矩阵, 其表达式与 (2.12) 相同, 只是此处 $L_j(s, p)$, $M_j(s, p)$ 及 $N_j(s, p)$ 为 2×2 的矩阵. 记 $[D(s, p)]$ 的逆矩阵为 $[K(s, p)]$, $K_m^n(s, p)$ 为 $[K(s, p)]$ 中第 m 行第 n 列元素, 对 (3.18) 式进行 Fourier 逆变换并表示成分量的形式得

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} i\sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ \tau_j^*(\bar{x}, p) \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k-\bar{a}_k}^{\bar{c}_k+\bar{a}_k} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} & K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} & K_{(2j)}^{(2k)} \end{bmatrix} e^{is(\bar{r}-\bar{x})} ds \right) \left\{ \begin{matrix} \phi_{xk}/i \\ \phi_{yk} \end{matrix} \right\} d\bar{r} + \\ &\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} & K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} & K_{(2j)}^{(2k)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \phi_{Tx} \\ \phi_{Ty} \end{matrix} \right\}_k e^{-is\bar{x}} ds \end{aligned} \tag{3.19}$$

以上推导对每一个界面均引入两个位错密度函数, 上式一共含有 $2(N - 1)$ 个方程, 对于没有裂纹的界面 (比如第 n 个界面), 则该界面的位错密度函数为零, 即 $\phi_{xn}(\bar{x}, p), \phi_{yn}(\bar{x}, p)$ 恒等于零, 因此上式中实际需要求解的方程个数等于裂纹个数的两倍.

现在分析 $[K(s, p)]$ 当 $|s| \rightarrow \infty$ 时的渐近行为, 由于没有裂纹的界面的位错密度函数恒等于零, 因此仅需分析 $[K(s, p)]$ 中与裂纹所在的界面有关的元素, 我们仅讨论材料参数沿该界面为连续变化的情形, 此时 $[K(s, p)]$ 的渐近值仅下列元素不为零

$$K_{(2j-1)}^{(2j)}(\infty, p) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} K_{(2j-1)}^{(2j)}(s, p) = -\frac{\text{sgn}(s)}{2}(G_y)_j \quad (3.20)$$

$$K_{(2j)}^{(2j-1)}(\infty, p) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} K_{(2j)}^{(2j-1)}(s, p) = \frac{\text{sgn}(s)}{2}(G_x)_j \quad (3.21)$$

式中

$$(G_x)_j = \frac{((C_{11})_J + (C_{12})_J \lambda_{1J}^2)((C_{11})_J + (C_{12})_J \lambda_{2J}^2)(C_{66})_J}{(C_{11})_J((C_{12})_J + (C_{66})_J)(\lambda_{1J} + \lambda_{2J})}, \quad (G_y)_j = \frac{(G_x)_j}{\lambda_{1J} \lambda_{2J}} \quad (3.22)$$

此处 $\lambda_{1J}, \lambda_{2J}$ 为特征方程 (3.4) 当 $|s| \rightarrow \infty$ 时的根.

定义 $\bar{k}_m^n(s, p) = k_m^n(s, p) - k_m^n(\infty, p)$, 可进一步将 (3.19) 简化成

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} i\sigma_j^*(\bar{x}, p) \\ \tau_j^*(\bar{x}, p) \end{array} \right\} &= \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} K_{(2j-1)}^{(2k-1)} & K_{(2j-1)}^{(2k)} \\ K_{(2j)}^{(2k-1)} & K_{(2j)}^{(2k)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \phi_{Tx} \\ \phi_{Ty} \end{array} \right\}_k e^{-isx} ds + \\ &\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \bar{k}_{(2j-1)}^{(2k-1)} & \bar{k}_{(2j-1)}^{(2k)} \\ \bar{k}_{(2j)}^{(2k-1)} & \bar{k}_{(2j)}^{(2k)} \end{bmatrix} e^{is(r-x)} ds \right) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{xk}/i \\ \phi_{yk} \end{array} \right\} d\bar{r} + \\ &\left\{ \begin{array}{l} \frac{-i(G_y)_j}{2\pi} \int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \frac{\phi_{yj}}{\bar{r} - \bar{x}} d\bar{r} \\ \frac{(G_x)_j}{2\pi} \int_{\bar{c}_j - \bar{a}_j}^{\bar{c}_j + \bar{a}_j} \frac{\phi_{xj}}{\bar{r} - \bar{x}} d\bar{r} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3 奇异积分方程组的解

方程 (3.23) 对裂纹内部以及裂纹外部均成立, 对于裂纹面内部的情形, 上述方程成为具有简单柯西类型核 $1/(\bar{r} - \bar{x})$ 的奇异积分方程组, 其解法和 2.3 节中方程 (2.16) 的解法相似, 首先将 ϕ_{xj} 和 ϕ_{yj} 表示为未知常数 $C_{jm}^x(p)$ 和 $C_{jm}^y(p)$ 的级数形式

$$\phi_{xj}(\bar{a}_j \bar{r}_j + \bar{c}_j, p) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}^x(p) T(\bar{r}_j) / \sqrt{1 - \bar{r}_j^2} \quad (3.24)$$

$$\phi_{yj}(\bar{a}_j \bar{r}_j + \bar{c}_j, p) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}^y(p) T(\bar{r}_j) / \sqrt{1 - \bar{r}_j^2} \quad (3.25)$$

其中 $\bar{r}_j = (\bar{r} - \bar{c}_j) / \bar{a}_j$, $T_m(\bar{r}_j)$ 为第一类切比雪夫 (Chebyshev) 幂级数. 截取级数的前 M 项, 并将其代入 (3.23) 中, 裂纹面应力边界条件 (1.2) 可以用加权残值法、配点法或者虚位移原理^[7] 满足. 求出 ϕ_{xj} 和 ϕ_{yj} 后, 即可由 (3.23) 式求出界面应力, 然后由 (3.10) 解出各层的位移, 从

而可得全场应力. 裂纹上、下表面相对张开位移 $u_{j+1}^{J*}(\bar{x}, p)$ 及相对滑动位移 $\nu_{j+1}^{J*}(\bar{x}, p)$ 为

$$(u_{j+1}^{J*}(\bar{x}, p) \quad \nu_{j+1}^{J*}(\bar{x}, p)) = -a_j \sum_{m=1}^M (C_{jm}^x(p) \quad C_{jm}^y(p)) \frac{\sin(\text{marccos } \bar{x}_j)}{m}, \quad |\bar{x}_j| < 1 \quad (3.26)$$

其中 $\bar{x}_j = (\bar{x} - \bar{c}_j) / \bar{a}_j$, 利用 (3.23)~(3.25) 式可求得裂纹尖端 I 型及 II 型应力强度因子为
裂纹左端

$$\left. \begin{aligned} (K_{I^*})_j &= (\sqrt{2[(c_j - a_j) - x]})_{x \rightarrow (c_j - a_j)^-} \sigma_j^*(\bar{x}, p) = -\frac{(G_y)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}^y(p) \\ (K_{II^*})_j &= (\sqrt{2[(c_j - a_j) - x]})_{x \rightarrow (c_j - a_j)^-} \tau_j^*(\bar{x}, p) = \frac{(G_x)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}^x(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

裂纹右端

$$\left. \begin{aligned} (K_{I^*})_j &= (\sqrt{2[(c_j - a_j) - x]})_{x \rightarrow (c_j + a_j)^+} \sigma_j^*(\bar{x}, p) = -\frac{(G_y)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^y(p) \\ (K_{II^*})_j &= (\sqrt{2[(c_j - a_j) - x]})_{x \rightarrow (c_j + a_j)^+} \tau_j^*(\bar{x}, p) = -\frac{(G_x)_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}^x(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

4 数值算例

分析一接头类型的结构, 几何尺寸及裂纹分布如图 2 所示, 该结构由不锈钢基底和氧化硅基底以及与它们相连接的不锈钢 / 氧化铝功能梯度材料 (FGM) 中间层组成. 结构总厚度为 h , 功能梯度中间层的厚度为 h_0 , 钢基底和氧化铝基底的厚度相等. 材料的杨氏模量 E , 泊松比 ν , 热膨胀系数 α , 质量密度 ρ , 热传导率 κ , 定容比热 c 的值见表 1.

表 1 钢和氧化铝的热机械性质

Table 1 Thermomechanical properties of steel and alumina

	E (GPa)	ν	α (m/m°C)	ρ (kg/m ³)	κ (Wm/m ² °C)	c (J/kg)
steel	206	0.33	12×10^{-6}	7.85×10^3	25	460
Al ₂ O ₃	380	0.22	8.5×10^{-6}	3.96×10^3	46	765

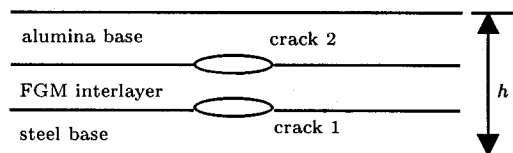


图 2 含两个裂纹的功能梯度接头结构

Fig.2 A functionally graded joint with two cracks

假设 FGM 中间层在其底面处为纯金属, 在其顶面处为纯陶瓷, 从底面到顶面各组份材料的体积含量为线性变化, 我们采用最简单的 Voigt 混合律求 FGM 中间层的热机械性质, 此外, 假设裂纹长度均为 $2a = h/3$, 裂纹中心位置相同, 外载条件为结构上、下表面 $\bar{x} \in (-4h, +4h)$ 范围内作用均匀分布的热流 $q_0 H(t)$, 其中 $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数, 裂纹面为绝热并且应力自由.

利用本文提出的层合板模型, 将 FGM 中间层划分为 N 个等厚度的单层, 层数的划分对应应力强度因子计算结果的影响如图 3 所示, 图中下标 m 代表金属, 可以看出, N 分别等于 20 和 30 时, 计算结果已经非常接近, 如果进一步加大 N , 计算结果几乎没有变化, 分析发现, 层数的增加对计算时间影响不大, 这说明可以将层数划分得很密, 以便精确模拟材料参数的变化情况, 显示出本文方法的优越性.

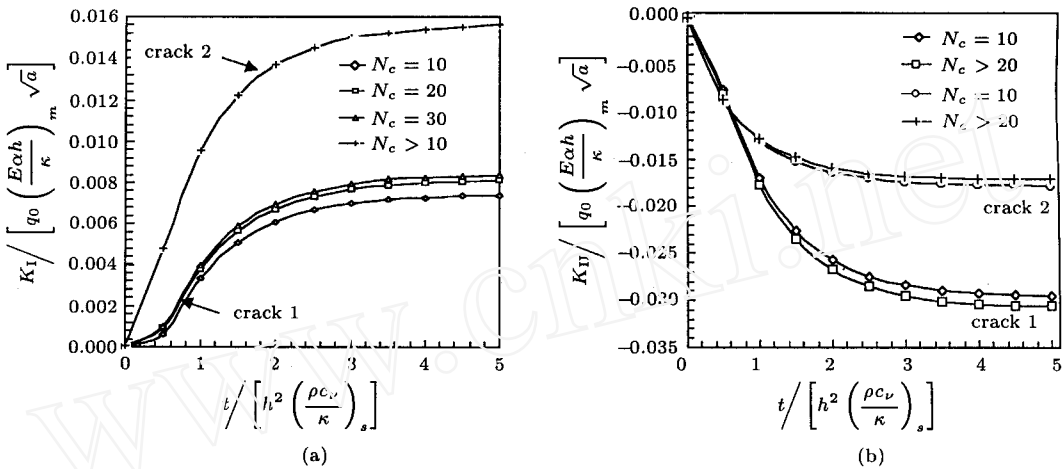


图 3 层数的划分对热应力强度因子计算值的影响 ($h_g = h/3$)

Fig.3 The influence of divided plies number N on thermal stress intensity factors ($h_g = h/3$)

FGM 中间层厚度与最大热应力强度因子的关系如图 4 所示, 由于裂纹之间的相互作用, h_g 对热应力强度因子的影响十分复杂, 应力强度因子可以随 h_g 的增加而增加或下降, 这说明在

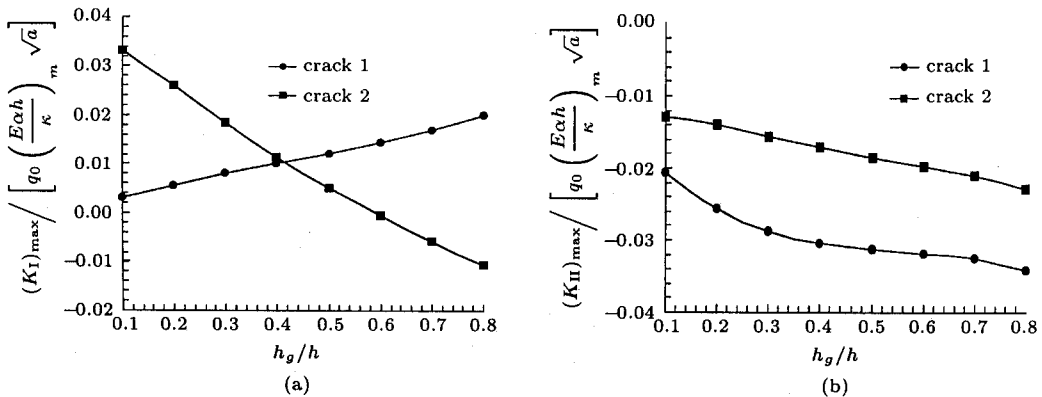


图 4 应力强度因子与中间层厚度的关系

Fig.4 The effect of FGM interlayer thickness, h_g , on stress intensity factor

进行材料或者结构设计时, 必须同时兼顾两个界面的不同特性, 以便求得合理的中间层厚度.

5 结 论

本文提出了一种适合于研究含多个裂纹的非均匀介质的动态热应力问题的方法, 进而可以分析各种参数对裂纹尖端动态热应力强度因子的影响, 基本结论如下:

1) 裂纹尖端热流具有反平方根奇异性, 当材料参数沿裂纹面为连续变化时, 裂纹尖端热应力具有反平方根奇异性.

2) 本文的方法适合于非均匀外加热流 (包括集中热流) 的情况. 由于考虑了惯性效应, 对于裂纹面上作用有机械载荷 (包括集中力) 的情况, 本文的方法也是适用的, 而且各裂纹面上的机械载荷可以互不相等.

3) 在某些情况下, 裂纹尖端 I 型热应力强度因子为负值, 表明裂纹面存在相互接触, 本文没有考虑接触效应, 但由于裂纹面的相互接触有利于热传导, 可以降低热应力强度因子, 因此本文的分析结果偏于保守.

参 考 文 献

- 1 Erdogan F, Wu BU. Crack problems in FGM layers under thermal stress. *J Thermal Stresses*, 1996, 19: 237~265
- 2 Jin ZH, Noda N. An internal crack parallel to the boundary of a nonhomogeneous half plane under thermal loading. *Int J Engng Sci*, 1993, 31: 793~806
- 3 Noda N, Jin ZH. Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally gradient material. *Int J Solids Structure*, 1993, 30: 1033~1051
- 4 Nemat-Alla M, Noda N. Study of an edge crack problem in a semi-infinite functionally graded medium with two dimensionally nonhomogeneous coefficients of thermal expansion under thermal load. *J Thermal Stresses*, 1996, 19: 863~888
- 5 Hata T. Thermal stress in a nonhomogeneous semi-infinite elastic solid under steady distribution of temperature. *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers (A)*, 1985, 51: 1789~1795
- 6 Jin ZH, Noda N. Transient thermal stress intensity factors for a crack in a semi-infinite plate of a functionally gradient material. *Int J Solids Structure*, 1994, 31: 203~218
- 7 Erdogan F, Ozturk M. Diffusion problems in bonded nonhomogeneous materials with an interface cut. *Int J Engng Sci*, 1992, 30(10): 1507~1523
- 8 王保林, 杜善义, 韩杰才. 非均匀复合材料中反平面裂纹的动态断裂力学研究. *复合材料学报*, 1998, 15(4): 119~127 (Wang BL, Du SY, Han JC. Dynamic fracture mechanics analysis for antiplane cracks in nonhomogeneous composite material. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 1998, 15(4): 119~127)
- 9 Wang BL, Han JC, Du SY. Dynamic fracture mechanics analysis for composite material with material non-homogeneity in thick direction. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1998, 11(1): 84~93

DYNAMIC FRACTURE MECHANICS ANALYSIS FOR NON-HOMOGENEOUS COMPOSITE MATERIAL WITH MULTIPLE CRACKS

Wang Baolin Du Shanyi Han Jiecai

(Center for Composite Material, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006, China)

Abstract The problem considered here is the response of a nonhomogeneous composite material containing some cracks subjected to dynamic thermal loading. It is assumed that all the material properties only depend on the coordinates y (along the thickness direction). In the analysis, the elastic region is divided into a number of strips of infinite length. The material properties are taken to be constants for each strip. By utilizing the Laplace transform and Fourier transform technique, the singular integral equations are derived and solved by weighted residuals method. Attention is focused on the time-dependent full field solutions of stresses, stress intensity factor. The special features of the present analysis are: (1) multiple cracks perpendicular to the thickness direction, (2) material may be orthotropic and (3) take into account of the inertia effect. As a numerical illustration, the dynamic stress intensity factor of a functionally graded material with two cracks under sudden applied thermal flux on the upper boundary and the lower boundary of the material are presented for various material non-homogeneity parameters.

Key words non-homogeneous composite material, functionally graded materials, multiple crack, dynamic thermal stresses, stress intensity factor

Received 9 March 1997, revised 15 July 1998.