

断裂问题特征根的重根探讨¹⁾

徐永君 袁 驹* 柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

*(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘要 利用特征矩阵的秩与特征根所对应的子特征函数空间维数之间的关系, 确定了反平面断裂问题和平面断裂问题的特征根可能出现的最大重根数. 利用 Reissner 型板特征根与反平面和平面断裂问题特征根的关系确定其可能出现的最大重根数. 得到了反平面断裂问题、平面断裂问题和 Reissner 板断裂问题可能出现的最大重根数分别为 1, 2, 3.

关键词 特征根, 重根, 反平面断裂问题, 平面断裂问题, Reissner 型板断裂问题

引 言

在断裂力学中, 裂纹或切口问题的特征解具有重要的理论意义和应用价值. 对于绝大多数数值方法来讲 (如边界配置法^[1]、基于 Betti 代换定理的互等功围线积分法^[2]、有限元法^[3]、分区有限元法^[4]等), 若要有效地求解断裂问题, 大都要在不同程度上直接或间接地利用特征根. 但是, 对于较为一般的情况 (如: 任意张角、多种不同材料、不同的切口边界条件等), 由于特征解的解析解答是很难得到的, 因而不得不采用数值方法. 而对于一般特征根的数值求解方法^[5~8]若知道特征根可能出现的最大重根数, 对寻求新的数值方法和程序研制具有重要指导意义. 本文意在探求反平面切口问题、平面切口问题和 Reissner 型板切口问题的可能出现的最大重根数.

本文从反平面断裂问题和平面断裂问题的切口边界条件与交接连续条件对应的特征矩阵入手, 利用特征矩阵的秩与特征根所对应的特征函数间的关系, 判断特征根对应的子特征函数空间基的维数, 即子特征函数空间的最大线性无关个数, 从而确定特征根可能出现的最大重根数. 给出了反平面断裂问题可能出现的最大重根数为 1, 平面断裂问题可能出现的最大重根数为 2, 进而利用 Reissner 型板特征根与反平面和平面断裂问题特征根的关系^[6]确定 Reissner 型板断裂问题的特征根可能出现的最大重根数为 3. 对特征根求解程序的研制及断裂问题的其它方面研究具有指导意义.

1 反平面断裂问题最大重根数

考虑图 1 所示若为 N 种材料不计体力的反平面切口问题, 设特征根 λ 对应的第 j 种材料域内位移 w_j 的 Williams 特征展开项为 $w_j = \alpha r^\lambda f_j(\theta)$, 由特征函数 $f_j(\theta)$ 表示的平衡方程为

1998-04-10 收到第一稿, 1998-08-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金和中国博士后科学基金资助项目.

$$f_j'' + \lambda^2 f_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

应力自由边界 (Stress Free, 简记为 F) 和位移给定边界 (Clamped, 简记为 C) 对应的切口边界条件为

$$\left. \begin{aligned} F: f_1'(\theta_1) = 0, \quad f_N'(\theta_{N+1}) = 0, \\ C: f_1(\theta_1) = 0, \quad f_N(\theta_{N+1}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

相应的交界位移连续和应力平衡条件为

$$\left. \begin{aligned} f_j(\theta_{j+1}) = f_{j+1}(\theta_{j+1}), \\ G_j f_j'(\theta_{j+1}) = G_{j+1} f_{j+1}'(\theta_{j+1}), \\ j = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

考虑式 (1) 的特征值 λ 所对应的特征函数 $f_j(\theta)$, 其通解为

$$f_j(\theta) = A_j \cos(\lambda\theta) + B_j \sin(\lambda\theta), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

相应的切口边界条件为

$$\left. \begin{aligned} F: -A_1 \sin(\lambda\theta_1) + B_1 \cos(\lambda\theta_1) = 0, \quad -A_N \sin(\lambda\theta_{N+1}) + B_N \cos(\lambda\theta_{N+1}) = 0 \\ C: A_1 \cos(\lambda\theta_1) + B_1 \sin(\lambda\theta_1) = 0, \quad A_N \cos(\lambda\theta_{N+1}) + B_N \sin(\lambda\theta_{N+1}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$$j = 1, 2, \dots, N - 1$$

交界位移连续和应力平衡条件变为

$$\left. \begin{aligned} A_j \cos(\lambda\theta_{j+1}) + B_j \sin(\lambda\theta_{j+1}) = A_{j+1} \cos(\lambda\theta_{j+1}) + B_{j+1} \sin(\lambda\theta_{j+1}) \\ \frac{G_j}{G_{j+1}} (-A_j \sin(\lambda\theta_{j+1}) + B_j \cos(\lambda\theta_{j+1})) = -A_{j+1} \sin(\lambda\theta_{j+1}) + B_{j+1} \cos(\lambda\theta_{j+1}) \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

由式 (4b) 可得相邻两材料域对应的系数间的关系为

$$\begin{Bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{Bmatrix} = [\Delta_j] \begin{Bmatrix} A_j \\ B_j \end{Bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (5)$$

其中

$$[\Delta_j] = \begin{bmatrix} \cos(\lambda\theta_{j+1}) & -\sin(\lambda\theta_{j+1}) \\ \sin(\lambda\theta_{j+1}) & \cos(\lambda\theta_{j+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{G_j}{G_{j+1}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda\theta_{j+1}) & \sin(\lambda\theta_{j+1}) \\ -\sin(\lambda\theta_{j+1}) & \cos(\lambda\theta_{j+1}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

由于 $|\Delta_j| = G_j/G_{j+1} \neq 0$, 所以相邻两材料域对应的系数是一一对应的。从而可得

$$\begin{Bmatrix} A_N \\ B_N \end{Bmatrix} = [\Delta] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix}, \quad [\Delta] = [\Delta_{N-1}], \dots, [\Delta_2][\Delta_1] \quad (7)$$

以切口两边界均为应力自由边为例, 相对于 $[A_1, B_1]^T$ 的特征方程为

$$|M| = \left| \begin{bmatrix} [-\sin(\lambda\theta_1), \cos(\lambda\theta_1)] \\ [-\sin(\lambda\theta_{N+1}), \cos(\lambda\theta_{N+1})][\Delta] \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (8)$$

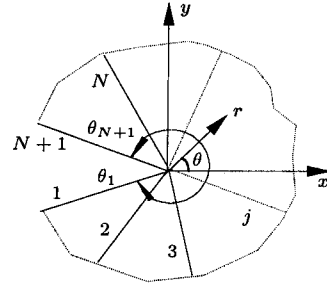


图 1 N 种材料切口示意图
Fig.1 N-material notch problem

由于 $|\Delta| \neq 0$ 并且 $\sin(\lambda\theta_1)$, $\cos(\lambda\theta_1)$, $\sin(\lambda\theta_{N+1})$, $\cos(\lambda\theta_{N+1})$ 至少不全为零, 所以矩阵 M 的秩至少是 1, 由此可知特征函数的基础解系最大线性无关个数为 1 ($1 = 2 - 1$), 即反平面切口问题的特征根不存在重根.

2 平面断裂问题最大重根数

对于图 1 所示若为 N 种材料不计体力的平面切口问题 (以下以平面应力为例推导), 第 j 种材料域内引入应力函数 $\phi_j(r, \theta)$, 设特征根 λ 对应的 Williams 特征展开项为

$$\phi_j(r, \theta) = r^{\lambda+1} F_j(\theta), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

相应的应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rrj} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) = r^{\lambda-1} [F_j'' + (\lambda+1)F_j] \\ \sigma_{\theta\theta j} &= \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda+1)F_j] \\ \sigma_{r\theta j} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) = r^{\lambda-1} [-\lambda F_j'] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

相应的位移场可由应力应变关系和应变位移关系推得

$$\left. \begin{aligned} u_{rj} &= r^\lambda \frac{(1-\nu_j\lambda)(1+\lambda)F_j(\theta) + F_j''(\theta)}{\lambda E_j} \\ u_{\theta j} &= r^\lambda \frac{(1+\lambda - (1-\lambda)\lambda\nu_j + 2\lambda^2)F_j'(\theta) + F_j'''(\theta)}{\lambda(1-\lambda)E_j} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由于应力函数 $\phi_j(r, \theta)$ 是双调和方程的通解, 所以 $F_j(\theta)$ 应为下列形式

$$F_j(\theta) = A_j \sin(\lambda+1)\theta + B_j \cos(\lambda+1)\theta + C_j \sin(\lambda-1)\theta + D_j \cos(\lambda-1)\theta \quad (12)$$

由此可将切口边界条件及交界条件相关的应力和位移表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta j} &= r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1) [f_1^j \ f_2^j \ f_3^j \ f_4^j] \{\delta_j\} \\ \sigma_{r\theta j} &= r^{\lambda-1} \lambda [f_5^j \ f_6^j \ f_7^j \ f_8^j] \{\delta_j\} \\ u_{rj} &= r^\lambda [f_9^j \ f_{10}^j \ f_{11}^j \ f_{12}^j] \{\delta_j\} \\ u_{\theta j} &= r^\lambda [f_{13}^j \ f_{14}^j \ f_{15}^j \ f_{16}^j] \{\delta_j\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 $\{\delta_j\} = [A_j \ B_j \ C_j \ D_j]^T$.

$$\left\{ \begin{aligned} f_1^j &= \sin(\lambda+1)\theta \\ f_2^j &= \cos(\lambda+1)\theta \\ f_3^j &= \sin(\lambda-1)\theta \\ f_4^j &= \cos(\lambda-1)\theta \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} f_5^j &= -(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta \\ f_6^j &= (\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta \\ f_7^j &= -(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta \\ f_8^j &= (\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} f_9^j = -(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\theta/2G_j \\ f_{10}^j = -(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\theta/2G_j \\ f_{11}^j = -(\lambda - \kappa_j) \sin(\lambda - 1)\theta/2G_j \\ f_{12}^j = -(\lambda - \kappa_j) \cos(\lambda - 1)\theta/2G_j \end{cases} \quad \begin{cases} f_{13}^j = -(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\theta/2G_j \\ f_{14}^j = (\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\theta/2G_j \\ f_{15}^j = -(\lambda + \kappa_j) \cos(\lambda - 1)\theta/2G_j \\ f_{16}^j = (\lambda + \kappa_j) \sin(\lambda - 1)\theta/2G_j \end{cases}$$

对于任一交界 θ_j ($j = 1, 2, 3, \dots, N$) 的应力平衡和位移连续条件为

$$[M_{j-1}]\{\delta_{j-1}\} = [M_j]\{\delta_j\} \tag{14}$$

其中

$$M_j = \begin{bmatrix} f_1^j & f_2^j & f_3^j & f_4^j \\ f_5^j & f_6^j & f_7^j & f_8^j \\ f_9^j & f_{10}^j & f_{11}^j & f_{12}^j \\ f_{13}^j & f_{14}^j & f_{15}^j & f_{16}^j \end{bmatrix}$$

易于得到矩阵 M_j 的行列式值为

$$|M_j| = (\lambda + 1) \frac{(\kappa_j + 1)^2}{4G_j^2} \tag{15}$$

只有当 $\lambda = -1$ 时，矩阵才奇异。在求解特征根时 $\lambda = -1$ 不涉及到。

由式 (14) 可得相邻两材料域对应的系数间的关系为

$$\{\delta_{j+1}\} = [\Delta_j]\{\delta_j\} = [M_{j+1}]^{-1}[M_j]\{\delta_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1 \tag{16}$$

$|\Delta_j| = ((\kappa_j + 1)^2 G_{j+1}^2) / ((\kappa_{j+1} + 1)^2 G_j^2) \neq 0$ ，相邻两材料域系数一一对应。从而可得

$$\{\delta_N\} = [\Delta]\{\delta_1\}, \quad [\Delta] = [\Delta_{N-1}], \dots, [\Delta_2][\Delta_1] \tag{17}$$

以切口两边界均为应力自由边为例，相对于 $\{\delta_1\}$ 的特征方程为

$$|M| = \left| \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 & f_4^1 \\ f_5^1 & f_6^1 & f_7^1 & f_8^1 \end{matrix} \right]_{\theta=\theta_1} \\ \left[\begin{matrix} f_1^N & f_2^N & f_3^N & f_4^N \\ f_5^N & f_6^N & f_7^N & f_8^N \end{matrix} \right]_{\theta=\theta_{N+1}} \end{bmatrix} [\Delta] \right| = 0 \tag{18}$$

由于 $|\Delta| \neq 0$ 并且 $f_1^j f_6^j - f_2^j f_5^j = (\lambda + 1)$, $f_3^j f_8^j - f_4^j f_7^j = (\lambda - 1)$ ($j = 1, N$) 不全为零，所以矩阵 M 的秩至少 2，由此可知特征函数的基础解系最大线性无关个数为 2 ($2 = 4 - 2$)，即特征根最多存在 2 重根。

3 Reissner 型板断裂问题最大重根数

如图 1 所示若为 Reissner 型板断裂问题，其特征根可分为两部分组合，一部分等于反平面断裂问题，另一部分等于平面应力断裂问题 (证明将在另文给出或参见文 [9])。由此得出 Reissner 型板断裂问题特征根的可能最大重根数应为 3，即当反平面问题对应部分的特征根与平面问题对应部分的 2 重特征根均相等的情况。

4 数值算例

考虑两切口边界均为应力自由边的单材料切口问题的特征根
对于单材料反平面切口问题其特征方程为

$$\sin \lambda \alpha = 0$$

特征根为

$$\lambda_i = i\pi/\alpha, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

不存在重根.

对于单材料平面切口问题, 其特征方程为

$$\sin^2(\lambda\alpha) - \lambda^2 \sin^2(\alpha) = 0$$

若上式存在重根则必须同时满足

$$\sin(\lambda\alpha) = 0, \quad \sin(\alpha) = 0, \quad \alpha \in (0, \pi]$$

即

$$\alpha = 2\pi, \quad \lambda = \frac{i}{2} \text{ (二重根)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha = \pi, \quad \lambda = i \text{ (二重根)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

对于单材料 Reissner 型板切口问题, 其特征方程为

$$(\sin^2 \lambda \alpha - \lambda^2 \sin^2 \alpha) \sin \lambda \alpha = 0$$

从上式也可以看出, 单材料 Reissner 型板切口问题其特征方程包含了反平面切口问题的特征方程和平面切口问题的特征方程两部分. 不难推出当且仅当 $\alpha = \pi$ 或 $\alpha = 2\pi$ 特征根才为重根 (三重根).

$$\alpha = 2\pi, \quad \lambda = \frac{i}{2} \text{ (三重根)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha = \pi, \quad \lambda = i \text{ (三重根)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

将单材料断裂问题特征根重根归纳为表 1, 为了便于对比我们将反平面问题的单根也一并列出.

表 1 单材料断裂问题特征根重根

Table 1 Multiple roots of single material crack problem

α	Anti-plane problem	Plane problem	Reissner plate	
π	i	i, i	i, i, i	$i = 1, 2, \dots$
2π	$\frac{i}{2}$	$\frac{i}{2}, \frac{i}{2}$	$\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}$	$i = 1, 2, \dots$
Multiple roots	1	2	3	

5 小 结

本文从反平面断裂问题和平面断裂问题的边界条件和交界连续条件对应的特征矩阵入手, 利用特征矩阵的秩与特征根所对应的无关特征函数个数之间的关系确定反平面断裂问题、平面断裂问题和 Reissner 型板断裂问题的特征根可能出现的最大重根数, 从而给出可能出现的最大重根数与所对应问题的自由度数目相同, 即分别为 1, 2, 3. 在数值算例中给出了单材料两切口边界为应力自由边的断裂问题, 只有在裂纹情况下才出现重根. 这些结论对特征根求解程序的研制及断裂问题的研究具有指导意义.

参 考 文 献

- 1 Gross B, Mendelson A. Plane elastic analysis of V -notched plate. *Int J Fract Mech*, 1972, 8: 267~276
- 2 Stern M, Becker EB, Dunham RS. A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *Int J Fract*, 1976, 12(3): 359~368
- 3 Lin KY, Mar JW. Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at a bi-material interface. *Int J Fract*, 1976, 12: 521~531
- 4 龙驭球, 支秉琛, 匡文起, 单建. 分区混合有限元法计算应力强度因子. 力学学报, 1982, 4: 341~353 (Long Yuqiu, Zhi Bingchen, Kuang Wenqi, Shan Jian. Sub-region mixed finite element method for the calculation of stress intensity factor. *Acta Mechanica Sinica*, 1982, 4: 341~353 (in Chinese))
- 5 徐永君, 袁骉. 断裂问题的特征根区间及其二分迭代求解. 工程力学, 1996, 13(4): 28~40 (Xu Yongjun, Yuan Si. Eigen-intervals and iterative eigen-solution in fracture problems. *Engineering Mechanics*, 1996, 13(4): 28~40 (in Chinese))
- 6 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete Eigen-solutions for Plane Notches with Multi-materials by the Imbedding Method. *International Journal of Fracture*, 1996, 81: 373~381
- 7 袁骉, 徐永君. 嵌入法和 Müller 法联合求解断裂问题特征根的完备解, 计算力学学报, 1997, 14(增刊): 639~642 (Yuan Si, Xu Yongjun. Complete eigen-solutions for crack by combination of imbedding method and Müller method. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, 14(Spe Iss): 639~642 (in Chinese))
- 8 徐永君, 袁骉. 多材料反平面断裂问题特征根的超逆幂迭代求解. 固体力学学报, 1997, 18(4): 290~294 (Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen-solutions for anti-plane notches with multi-materials by super-inverse iteration. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 10(2): 157~166 (English Series))
- 9 徐永君. 断裂问题特征根的完备求解和基于有限元线法的应力强度因子计算. [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 1996 (Xu Yongjun. Complete eigenvalue solution and SIF calculation in fracture mechanics based on FEMOL. [Ph D Thesis]. Department of Civil Engineering, Beijing: Tsinghua University, 1996 (in Chinese))

POSSIBLE MULTIPLE ROOTS FOR FRACTURE PROBLEMS¹⁾

Xu Yongjun Yuan Si* Liu Chuntu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

(**Dept. of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract In accordance with the relationship between the eigen-matrix rank and sub-eigenfunction dimension of eigen-values, the maximum number of possible multiple roots for anti-plane problem and in-plane problem is determined. In view of the relationship with eigen-values of anti-plane and in-plane problem, the eigen-values for Reissner plate consists of two parts. One part associates with anti-plane problem, the other part pertains to in-plane problem. Therefore, the maximum number of multiple roots for anti-plane problem, in-plane problem and Reissner plate are 1, 2 and 3, respectively. The conclusion is demonstrated in a numerical example of single material with stress-free notch/crack. It is also found that multiple roots exist only in the case of crack. The present results offer significant insight into the study of notch/crack problem and the useful guideline for program design.

Key words eigen-value, multiple roots, anti-plane problem, plane problem, Reissner plate

Received 10 April 1998, revised 28 August 1998.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China and The Postdoctoral Science Foundation of China.