

# 全局分析的广义胞映射图论方法<sup>1)</sup>

徐健学 洪 灵

(西安交通大学非线性动力学研究所, 西安 710049)

**摘要** 应用广义胞映射理论的离散连续状态空间为胞状态空间的基本概念, 依循 Hsu 的将偏序集和图论理论引入广义胞映射的思想, 以集论和图论理论为基础, 提出了进行非线性动力系统全局分析的广义胞映射图论方法. 在胞状态空间上, 定义二元关系, 建立了广义胞映射动力系统与图的对应关系, 给出了自循环胞集和永久自循环胞集存在判别定理的证明, 这样可借助图论的理论和算法来确定动力系统的全局性质. 应用图的压缩方法, 对所有的自循环胞集压缩后, 在全局瞬态分析计算中瞬态胞的总数目得到有效地减少, 并能借助于图的算法有效地实现全局瞬态的拓扑排序. 在整个定性性质的分析计算中, 仅采用布尔运算.

**关键词** 非线性动力系统, 全局分析, 吸引子, 吸引域, 广义胞映射, 图论

## 引 言

在非线性动力系统全局分析中, 人们最感兴趣的是找到所有的吸引子和吸引域, 吸引子和吸引域是重要的动力学现象, 通常认为动力系统的吸引子是一个不可分割的闭不变集合, 表现为长期的动力学行为. 吸引子可以是平衡状态、周期运动、准周期运动和奇怪吸引子, 不是吸引子的所有状态就是瞬态, 人们当然也想知道从某一初瞬态出发最终将演化发展到哪一个吸引子, 并且需要行进多长时间, 关心每一个吸引子的吸引域, 以及各吸引域之间的边界区域. 80年代初 Hsu 提出了进行非线性动力系统全局分析的胞映射方法<sup>[1,2]</sup>, 1992年 Hsu 又提出了动力系统瞬态过程结构的胞映射分析<sup>[3]</sup>, 1995年 Hsu 进一步提出了广义胞映射与偏序集 (poset) 和图论数学分支的对应<sup>[4]</sup>. 本文依循文献<sup>[4]</sup>的思路, 以集合理论<sup>[5]</sup>为基础, 建立广义胞映射动力系统与图的对应关系, 提出了全局分析的广义胞映射图论方法.

## 1 广义胞映射动力系统

数学方程表示的动力系统有常微分方程形式和点映射方程形式, 如果将连续状态空间离散化为胞状态空间可得到简单胞映射方程和广义胞映射方程, 这些数学方程表示了动力系统的演化规律. 现在我们仅考虑广义胞映射动力系统, 文献<sup>[1, 2]</sup>依据马尔可夫链理论提出了全局分析的广义胞映射方法, 方法包括两个部分:

1) 提出广义胞映射动力系统, 并表征为马尔可夫链概率模型, 其广义胞映射动力系统演化方程为

$$p(n+1) = Pp(n) \quad \text{或} \quad p(n) = P^n p(0) \quad (1)$$

$P = [p_{ij}]$  为马尔可夫链的一步转移概率矩阵,  $P$  完全决定了整个动力系统的演化规律.  $P^n = [p_{ij}^{(n)}]$  为  $n$  步转移概率矩阵,  $p(n)$  为  $n$  时刻的概率分布向量.

1997-01-28 收到第一稿, 1998-08-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19672046).

2) 依照马尔可夫链理论和方法求解方程 (1), 进行吸引子、吸引域、吸引子统计特性和瞬态结构等全局问题的分析和研究.

由于第二部分的计算繁重, 影响了广义胞映射方法的有效展开. 而第一部分的广义胞映射方法的建模思想很好适应全局分析深入研究的需要. 下面我们称方程 (1) 表征的动力系统为广义胞映射动力系统.

## 2 状态胞的基本性质和分类

为了改进上节末指出的广义胞映射方法的缺点, Hsu 首先提出将偏序集和图论理论引入广义胞映射分析 [4]. 本文以马尔可夫链经典理论为基础 [6], 给出了以定义闭集为特点的和文献 [4] 有一定不同的状态胞的重新划分及定义, 其目的是能够在胞状态空间上, 将图直接引入广义胞映射动力系统, 并给出严格的数学证明.

**定义 2.1** 可达与互通 [5] 在映射下, 状态胞  $i$  可达状态胞  $j$ , 我们称胞  $i$  可达胞  $j$ , 记为  $i \Rightarrow j$ . 胞  $i$  可达胞  $j$ , 当且仅当存在正整数  $m$ , 使  $p_{ij}^{(m)} > 0$ . 若自胞  $i$  经一步映射可达胞  $j$ , 即  $p_{ij} > 0$ , 称胞  $i$  一步可达胞  $j$ , 记为  $i \rightarrow j$ . 在映射下, 胞  $i$  和胞  $j$  互通, 当且仅当胞  $i$  可达胞  $j$  且胞  $j$  可达胞  $i$ , 记为  $i \Leftrightarrow j$ .

**定义 2.2** 自循环胞集 (self-cycling set) 状态胞集中的任意两个胞互通, 这个状态胞集称为自循环胞集. 属于自循环胞集中的胞称为自循环胞.

自循环胞集代表动力系统稳定和不稳定的不动点和周期解.

**定义 2.3** 闭集 (closed set) 状态胞集合  $Z_\alpha \subset Z$  (胞状态空间) 称为闭集, 若对任意胞  $i \in Z_\alpha$ , 胞  $j \notin Z_\alpha$  (胞  $j \in Z$ ), 总存在  $p_{ij} = 0$ .

**定义 2.4** 永久自循环胞集 (persistent self-cycling set) 如果自循环胞集为闭集, 称为永久自循环胞集, 简称为永久胞集. 属于永久胞集内的胞称为永久胞. 状态胞  $i$  称为吸收胞, 若单胞集  $\{i\}$  为闭集. 对于吸收胞  $i$  有  $p_{ii} = 1$  且  $p_{ij} = 0$  (当  $i \neq j$  时).

永久胞集代表动力系统长期稳定的运动, 它就是吸引子.

**定义 2.5** 瞬态自循环胞集 (transient self-cycling set) 如果自循环胞集不是闭集, 称为瞬态自循环胞集. 属于瞬态自循环胞集中的胞称为瞬态自循环胞.

瞬态自循环胞集通常与动力系统不稳定的不动点和周期解对应.

**定义 2.6** 自循环胞集的周期. 称状态胞  $j$  有周期  $d$ , 若正整数集  $\{n \mid p_{jj}^{(n)} > 0\}$  的最大公约数  $d$ , 记为  $d = g \cdot c \cdot d\{n \mid p_{jj}^{(n)} > 0\}$ ,  $d > 1$  时称  $j$  为周期的;  $d = 1$  时称  $j$  为非周期的.

极限概率分布、瞬胞和瞬胞集、吸收概率和平均吸收时间等定义可参看文献 [3].

## 3 广义胞映射动力系统与图

为了图论理论和方法的引入, 不同于文献 [4], 本文依据集合理论 [5], 直接在胞状态空间上定义二元关系, 建立广义胞映射动力系统与图的对应关系, 并给出这种对应关系的严格数学证明.

假设涉及的状态胞总数目为  $N$ , 所有状态胞为元素所组成的集合 (即胞状态空间) 表示为  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_N\}$ , 或简单表示为  $Z = \{1, 2, \dots, i, \dots, N\}$ , 在状态胞集  $Z$  上定义二元关系.

1) 在状态胞集  $Z$  上定义“一步可达  $\rightarrow$ ”关系  $R_{a1}$ , 一步可达关系  $R_{a1}$  的关系图就是一有向赋权图  $DR_{a1}$ ,  $DR_{a1} = (V, E)$ , 顶点集  $V = Z$ , 弧集  $E = R_{a1}$ . 当  $z_i R_{a1} z_j$  时, 有有向弧  $(z_i, z_j)$ ,

且赋权  $p_{ij}$ .  $DR_{a1}$  称为一步映射图. 一步映射图的邻接矩阵  $MR_{a1} = [m_{ij}]$  和转移概率矩阵  $P = [p_{ij}]$  的关系为:  $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } p_{ij} > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } p_{ij} = 0 \text{ 时} \end{cases}$ .

2) 构造一步可达关系  $R_{a1}$  的传递闭包关系  $t(R_{a1}) = \bigcup_{i=1}^N R_{a1}^i$ , 由  $t(R_{a1})$  可得到状态胞集  $Z$  上每一个胞的传递闭包集, 并且用符号  $\{z_i\}^+$  表示, 其中  $i = 1, 2, \dots, N$ .  $\{z_i\}^+$  是由胞  $z_i$  可达的所有的胞组成的集合, 又可写为:  $\{z_i\}^+ = \{z_j \mid z_i t(R_{a1}) z_j, z_i \in Z, z_j \in Z\}$ .

3) 在状态胞集  $Z$  上定义“互通  $\Leftrightarrow$ ”关系  $R_c$ , 关系  $R_c$  的自反闭包关系为  $r(R_c) = I_A \cup R_c$ , 其中  $I_A$  为恒等关系.  $r(R_c)$  满足等价关系的三个条件即: 自反性; 对称性; 传递性.  $r(R_c)$  是状态胞集  $Z$  上的等价关系,  $r(R_c)$  唯一地决定了  $Z$  上的一个划分  $\pi(Z)$ , 并且有:  $\pi(Z) = \{Z_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N_c$ . 其中  $\bigcup_\alpha Z_\alpha = Z$ , 且  $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset (\alpha \neq \beta)$ .  $N_c$  表示划分的块数,  $n_\alpha$  表示每一块  $Z_\alpha$  中状态胞的数目.

**定理 3.1** (自循环胞集的存在判别定理)  $Z_\alpha$  是自循环胞集的充分必要条件是对每一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 总存在  $Z_\alpha \subseteq \{i\}^+$ .

必要性: 用反证法.  $Z_\alpha$  是自循环胞集, 假设存在某一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 使得  $Z_\alpha \not\subseteq \{i\}^+$ . 由于  $Z_\alpha \not\subseteq \{i\}^+$ ,  $i \in Z_\alpha$ , 必然存在有一个胞  $j \in Z_\alpha$ , 但  $j \notin \{i\}^+$ . 又因为胞  $j \notin \{i\}^+$ , 那么胞  $i$  不可达胞  $j$ , 即  $i \not\rightarrow j$ . 由此推出存在胞  $i \in Z_\alpha$ , 胞  $j \in Z_\alpha$ , 但胞  $i$  不可达胞  $j$ , 这个结论与  $Z_\alpha$  是自循环胞集矛盾. 证毕.

充分性: 反证法. 对每一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 存在  $Z_\alpha \subseteq \{i\}^+$ . 假设  $Z_\alpha$  不是自循环胞集. 由于  $Z_\alpha$  不是自循环胞集, 存在两个胞  $i, j \in Z_\alpha$ , 使得胞  $i$  不可达胞  $j$  或者胞  $j$  不可达胞  $i$ . 如果胞  $i$  不可达胞  $j$ , 一定存在  $j \notin \{i\}^+$ , 由此推出存在胞  $j \in Z_\alpha$ , 但胞  $j \notin \{i\}^+$ , 也就是  $Z_\alpha \not\subseteq \{i\}^+$ , 给出矛盾. 如果胞  $j$  不可达胞  $i$ , 类似地也可推出矛盾. 证毕.

**定理 3.2** (永久自循环胞集的存在判别定理) 对自循环胞集  $Z_\alpha$ ,  $Z_\alpha$  是闭集的充分必要条件是对每一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 总存在  $Z_\alpha = \{i\}^+$ .

必要性: 反证法.  $Z_\alpha$  是闭集, 假设存在一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 有  $Z_\alpha \neq \{i\}^+$ . 由定理 3.1 可知:  $Z_\alpha \subset \{i\}^+$ . 由于  $Z_\alpha \subset \{i\}^+$ , 一定存在某一个胞  $j$ , 胞  $j \notin Z_\alpha$ , 但胞  $j \in \{i\}^+$ . 由于胞  $j \in \{i\}^+$ , 那么胞  $i$  可达胞  $j (i \rightarrow j)$ . 由此推得存在胞  $i \in Z_\alpha$ , 但胞  $j \notin Z_\alpha$ , 胞  $i$  可达胞  $j$ . 这与  $Z_\alpha$  为闭集矛盾. 证毕.

充分性: 反证法. 对每一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 总存在  $Z_\alpha = \{i\}^+$ , 假设  $Z_\alpha$  不是闭集. 由于  $Z_\alpha$  不是闭集, 那么存在两个胞  $i, j$ , 并且  $i \in Z_\alpha, j \notin Z_\alpha$ , 胞  $i$  可达胞  $j (i \rightarrow j)$ . 由于胞  $i$  可达胞  $j$ , 那么  $j \in \{i\}^+$ . 由此推出存在一个胞  $j$ , 胞  $j \notin Z_\alpha$ , 并且胞  $j \in \{i\}^+$ , 进而推出  $Z_\alpha \subset \{i\}^+$ . 推出矛盾, 证毕.

基于定理 3.1 和定理 3.2 可以得到下列结论:

a)  $Z_\alpha$  是仅有一个胞组成的单胞集 ( $n_\alpha = 1$ ), 让  $Z_\alpha = \{i\}$ .

① 如果  $Z_\alpha = \{i\} = \{i\}^+$ , 胞  $i$  是一吸收胞. 在一步映射图上,  $i$  是一吸收胞当且仅当它具有一自环并且权值为 1.

② 如果  $Z_\alpha = \{i\} \subset \{i\}^+$ , 胞  $i$  是一瞬态自循环胞. 在一步映射图上, 胞  $i$  具有权值小于 1 的自环, 并且出度大于 1.

③ 如果  $Z_\alpha = \{i\} \not\subseteq \{i\}^+$ , 即  $i \notin \{i\}^+$ , 胞  $i$  不可达胞  $i$ ,  $i$  是一瞬胞.

b)  $Z_\alpha$  由多于一个胞组成 ( $n_\alpha > 1$ ),  $Z_\alpha$  是自循环胞集. 在一步映射图上看, 导出子图  $D[Z_\alpha]$

是强连通分支.

**定义 3.1** 在一步映射图中, 压缩每一个强连通分支的所有弧以后, 得到的图称为一步映射图  $DR_{a1}$  的压缩图, 压缩图用符号  $DR_{con}$  表示. 在压缩图  $DR_{con}$  中, 对应于强连通分支的顶点称为该强连通分支的压缩顶点.

①如果对每一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 存在  $Z_\alpha = \{i\}^+$ ,  $Z_\alpha$  是一永久胞集. 在压缩图  $DR_{con}$  上看, 强连通分支  $D[Z_\alpha]$  的压缩顶点的出度为零.

②如果存在一个胞  $i \in Z_\alpha$ , 有  $Z_\alpha \subset \{i\}^+$ ,  $Z_\alpha$  是一瞬态自循环胞集. 在压缩图  $DR_{con}$  上看, 强连通分支  $D[Z_\alpha]$  的压缩顶点的出度大于零.

4) 在全局稳态分析完成后, 考虑集合  $\pi(Z) = \{Z_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N_c$ . 每一块  $Z_\alpha$  的代表元用  $k_\alpha$  表示. 所有代表元  $k_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N_c$  组成的集合用符号  $K$  表示, 即  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_\alpha, \dots, k_{N_c}\}$ , 在集合  $K$  上再定义“可达  $\Rightarrow$ ”关系  $R_a$ . 可达关系  $R_a$  在集合  $K$  上是反自反的和传递的, 因此  $R_a$  是集合  $K$  上的拟序关系 (即严格偏序关系), 那么  $K$  是一拟序集  $(K, <)$ . 集合  $K$  上的拟序关系能用有向无环图 (acyclic digraph) 或哈斯图 (Hasse digraph) 表示.

**定义 3.2** 对于拟序集  $(K, <)$ , 由集合  $K$  上的某个拟序关系得到该集合上的全序, 这个操作称为拓扑排序, 这个全序称为集合  $K$  上的拓扑序.

在集合  $K$  上进行拓扑排序后, 可以得到全局瞬态演化过程和全局瞬态胞的层次关系, 并且按瞬胞具有的驻址分类瞬胞为瞬胞集后, 可得到每个吸引子的吸引域以及各吸引子的吸引域的边界集合. 有许多图的算法可以有效解决拓扑排序问题<sup>[7,8]</sup>.

5) 根据以上全局稳态和全局瞬态分析的讨论, 全局性质可以分为两大类, 第一类是由定性性质 (或称拓扑性质) 组成. 从“可达”和“互通”关系看出, 胞  $i$  是否可达胞  $j$ , 仅取决于是否存在从胞  $i$  到胞  $j$  的有向路径 (directed path), 而与路径上诸有向弧  $(i, j)$  的权值  $p_{ij}$  无关, 因此我们将建立在“可达”与“互通”关系上的动力系统全局性质称为全局定性性质, 也就是说, 定性性质仅与转移概率矩阵  $P$  中非零元素的位置有关, 而非零元素的大小无关. 自然属于第二类的就是定量性质, 例如: 极限概率分布, 吸收概率和平均吸收时间等. 事实上, 划分全局性质为两大类的意义在于研究动力系统的定性性质, 不需要进行定量计算, 这导致了处理方法的不同, 这样, 在全局定性性质的分析计算中, 仅采用布尔运算, 从而保证了算法的精度和高效.

## 4 算法构造

在建立了广义胞映射动力系统与图的对应关系后, 图论的丰富理论和强大算法能被直接用来进行动力系统的全局分析, 有关具体算法的构造, 达到相同的目的可采用不同的算法, 以下给出一种算法过程的几个关键子块.

1) 确定所有自循环胞集的算法: 由转移概率矩阵  $P = [p_{ij}]$  可获得一步映射图的邻接矩阵  $MR_{a1} = [m_{ij}]$ , 邻接矩阵  $MR_{a1}$  是一布尔矩阵 (矩阵的元素为 0 与 1), Warshall 算法<sup>[8]</sup> 是一个直接从邻接矩阵求传递闭包矩阵  $TR_{a1}$  的有效算法.

2) 确定自循环胞集周期的算法: 由周期定义可知, 周期性是自循环胞集上的一种组合性质, 同一自循环胞集内每一个状态胞具有相同的周期. 自循环胞集的周期  $d$  能用一个有限计算公式表示<sup>[9]</sup>.

3) 拓扑排序算法: 压缩图的传递闭包矩阵能直接由  $TR_{a1}$  获得, 用  $TR_{con}$  表示, 当然  $TR_{con}$  也是拟序集  $K$  的关系矩阵, 这样应用深度优先搜索法或广度优先搜索法获得拟序集  $K$  的拓扑排序, 有关拓扑排序算法可参看文献 [7, 8].

5 算 例

算例 1 (logistic 映射)

$$x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n)) \tag{2}$$

考虑三种情形  $\mu = 4.0$ ,  $\mu = 3.7$  和  $\mu = 3.825$ . 应用本文的广义胞映射图论方法, 取 500 个正规胞 (regular cell) 覆盖  $0 \leq x \leq 1$  范围, 每个胞内取 200 个采样点. 计算结果表明, 对于  $\mu = 4.0$  的情况, 所有 500 个正规胞属于一个巨大的非周期永久胞集, 这个非周期永久胞集的极限概率分布如图 1(a) 所示, 对于  $\mu = 3.7$  和  $\mu = 3.825$  的情形, 长期混沌运动由一个巨大的非周期永久胞集

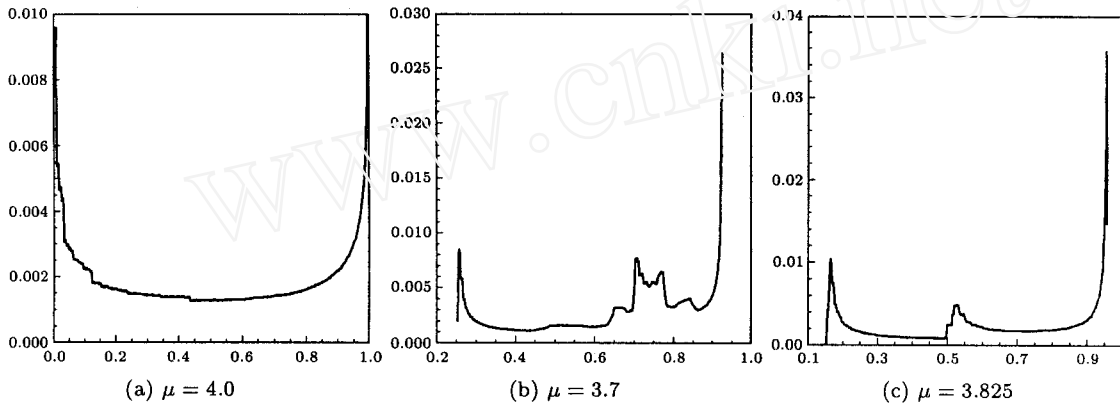


图 1 logistic 映射 (2) 长期混沌运动的极限概率分布

Fig.1 The limiting probability density of the long term chaotic motion for the logistic map (2)

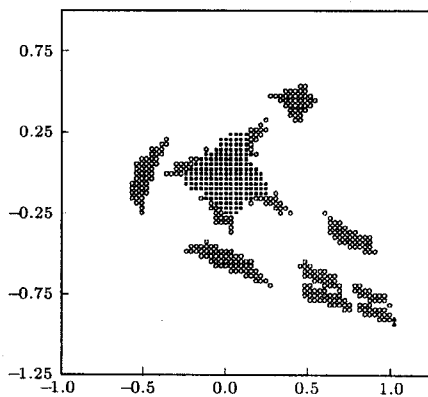


图 2 系统 (3), 当  $\mu = 0.1$ , 在原点处的一非周期永久胞集用符号“■”表示, 在点  $(1.0, -0.9)$  处的两个瞬态自循环胞集用符号“▲”表示, 其余所有的瞬态自循环胞集用“○”表示

Fig.2 For the system (3) with  $\mu = 0.1$ , the symbol “■” stands for an acyclic persistent set at the origin, the symbol “▲” stands for the two transient self-cycling sets near the point  $(1.0, -0.9)$ , and the symbol “○” stands for all the other transient self-cycling sets

代表, 所有其它的正规胞都是瞬胞, 非周期永久胞集的极限概率分布如图 1(b) 和图 1(c) 所示, 其结果很好地复合了文献 [2] 的结果.

算例 2

$$\left. \begin{aligned} x_1(n+1) &= (1-\mu)x_2(n) \\ &+ (2-2\mu+\mu^2)(x_1(n))^2 \\ x_2(n+1) &= -(1-\mu)x_1(n) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

考虑  $\mu = 0.1$  的情形, 应用广义胞映射图论方法, 对于系统 (3), 构建广义胞映射动力系统, 应用  $75 \times 75$  个正规胞均匀地覆盖  $-1.00 \leq x_1 \leq 1.25$ ,  $-1.25 \leq x_2 \leq 1.00$  范围, 每个胞中取 100 个采样点. 计算结果表明, 在原点处有一个非周期永久胞集, 在点  $(1.0, -0.9)$  处有两个瞬态自循环胞集, 分别代表点映射系统 (3) 在原点处的稳定焦点, 在  $(1.0, -0.9)$  处的鞍点. 永久胞集和所有瞬态自循环胞集如图 2 所示, 吸引

域以及吸引域的边界区域如图 3 所示，其结果很好地复合了分析结果 [2]。

## 7 结 论

1) 以集合理论为基础，在胞状态空间上定义二元关系，建立了广义胞映射动力系统与图的对应关系，将图直接引入动力系统，并给出了严格的数学证明，保证了方法的准确性。

2) 由于将图直接引入了动力系统，动力系统全局分析的每一个过程都可通过图的算法实现，而且在进行动力系统定性性质的分析计算中，整个算法过程是布尔运算，布尔运算绝对准确、可靠、费时少，提高了算法的准确性和效能。

3) 在自循环胞集确定以后，通过采用图的压缩方法，将所有自循环胞集压缩后，广义胞映射动力系统成为一拟序集，对应有向无环图或哈斯图，使得在全局瞬态分析计算中涉及的瞬态胞的总目得到有效减少，并能借助图的算法有效地实现全局瞬态的拓扑排序。

由此可见，本文的广义胞映射图论方法在理论基础、算法构造、准确性、效能方面推进了文献 [3, 4] 的工作。

## 参 考 文 献

- 1 Hsu CS. A generalized theory of cell to cell mapping for nonlinear dynamical systems. *J Applied Mechanics*, 1981, 48: 634~642
- 2 Hsu CS. Cell-to-Cell Mapping: A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems. New York, Berlin, Heidelberg, Vienna, Tokyo: Springer-Verlag, 1987
- 3 Hsu CS. Global analysis by cell mapping. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(4):727~771
- 4 Hsu CS. Global analysis of dynamical systems using posets and digraphs. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1995, 5(4): 1085~1118
- 5 刘光奇, 张霭珠, 胡美琛. 离散数学. 上海: 复旦大学出版社, 1988 (Liu Guangqi, Zhang Aizhu, Hu Meichen. Discrete Mathematics. Shanghai: Fudan University Press, 1988 (in Chinese))
- 6 Isaacson DL, Madsen RW. Markov Chains: Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1976
- 7 Swamy MNS, Thulasiraman K. Graphs, Networks, and Algorithms. New York: John Wiley & Sons, 1981
- 8 肖位枢. 图论及其算法. 北京: 航空工业出版社, 1993 (Xiao Weishu. Graph Theory and Its Algorithm. Beijing: Aviation Industry Press, 1993 (in Chinese))
- 9 陈永义, 何文清, 尤传华. 齐次有限马尔可夫链的周期的计算. 兰州大学学报 (自然科学版), 1988, 24(3): 1~6 (Chen Yongyi, He Wenqing, You Chuanhua. Calculation of period for an homogeneous finite Markov Chain. *Journal of Lanzhou University*, 1988, 24(3): 1~6 (in Chinese))

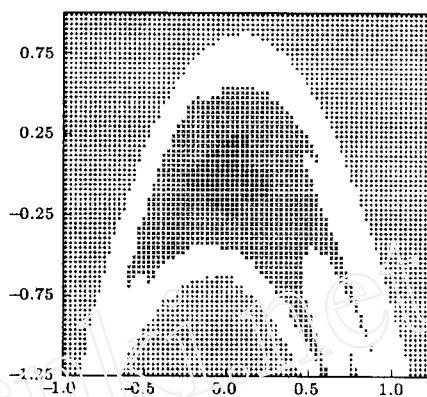


图 3 系统 (3), 当  $\mu = 0.1$ , 在原点处的一非周期永久胞集用符号“■”表示, 它的吸引域用“x”表示, 陷胞的吸引域用“+”表示, 吸引域的边界区域用“空白”表示

Fig.3 For the system (3) with  $\mu = 0.1$ , the symbol “■” stands for an acyclic persistent set at the origin, the symbol “x” stands for its domain of attraction, the symbol “+” stands for the domain of attraction of the sink cell, and the blank space stands for the boundary region

## GENERALIZED CELL MAPPING DIGRAPH METHOD FOR GLOBAL ANALYSIS <sup>1)</sup>

Xu Jianxue    Hong Ling

(*Institute of Nonlinear Dynamics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

**Abstract** In this paper, according to Hsu's idea that posets and digraphs are introduced into generalized cell mapping, a generalized cell mapping digraph method is presented by using the theory of generalized cell mapping discretizing the continuous state space into the cell state space and the theories of set and digraph to achieve the task of global analysis of nonlinear dynamical systems. In the cell state space, we make the correspondence between generalized cell mapping dynamical systems and digraphs. The demonstrations of the two theorems of existence of self-cycling set and persistent self-cycling set are given. State cells are classified, and self-cycling sets, persistent self-cycling sets and transient self-cycling sets are defined. The persistent self-cycling sets represent the attractors of the systems, while the transient self-cycling sets are usually associated with the unstable fixed points and periodic solutions. Digraphs are introduced into generalized cell mapping systems by defining binary relations in the cell state space, thus, the rich theories and the very powerful algorithms in the field of graphs and digraphs are adopted for the purpose of determining the global evolution properties of the systems. After all the self-cycling sets are condensed by using digraph condensation method, the number of the state cells involved can be efficiently decreased in the global transient analysis, and a topological sorting of the global transient state cells can be efficiently achieved by digraph algorithms, simultaneously, after transient cells are classified to transient cell sets according to the number of the domiciles that they have, domains of attraction and boundary regions can also be determined. Based on the different treatments, the global properties can be divided into qualitative (topological) and quantitative properties. In the whole analysis of the qualitative properties, only Boolean operations are used. The Boolean operations are absolutely accurate, reliable, and time-saving. It is believed that the generalized cell mapping digraph method offers us a new way to examine the complicated behavior of nonlinear dynamical systems.

**Key words** nonlinear dynamical system, global analysis, attractor, attraction domain, generalized cell mapping, digraph

---

Received 28 January 1997, revised 3 August 1998.

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 19672046).