

# 一种确定非线性裂纹转子解的形式的新方法<sup>1)</sup>

郑吉兵

(西南交通大学应用力学与工程系, 成都 610031)

孟光

(西北工业大学振动工程研究所, 西安 710072)

**摘要** 将小波变换与 Poincare 映射相结合, 即用 Poincare 映射确定周期解, 用谐波小波变换区分拟周期响应和混沌运动, 提出了一种分析非线性裂纹转子系统解的形式随参数变化的新方法. 结果表明这种方法是行之有效的, 它比以前所用的计算 Liapunov 指数的方法节约了计算时间, 并且较易实施.

**关键词** 非线性振动, 转子动力学, 小波变换, 混沌

## 前 言

非线性涡动的 Jeffcott 裂纹转子具有丰富的周期解, 拟周期运动及混沌现象<sup>[2]</sup>. 对某一组固定参数, 要判断系统响应是否进入了混沌, 往往要通过 Poincare 图、功率谱、相图、波形图或计算李亚普诺夫指数等方法. 从图形上来作出判断只能得出粗略的结论, 要分析参数空间或初值空间就不可能了, 而李亚普诺夫指数的计算非常费时间. 由于小波变换在时域和频域中同时具有良好的局部性质, 而混沌的重要特征是它不能随时间变化周期重复, 因此, 通过小波变换可以很好的将这一特征反映出来. 由此, 本文提出了用谐波小波 (Harmonic Wavelet) 变换<sup>[1]</sup>来识别混沌的方法. 由于任何非线性振动系统, 其解最多有三种不同形式, 即各种形式的周期解, 拟周期运动和混沌响应. 将小波变换和 Poincare 映射结合起来, 用 Poincare 映射来确定周期解及周期数, 用小波变换来区分拟周期解和混沌, 可对系统解的形式作出准确的判断. 本文用这种方法计算了参数空间所对应的解的形式的存在域. 如果参数空间对应的存在域具有混沌信号, 这表明具有类似噪声特性的功率谱是系统的固有特性, 在信号分析中不应按噪声滤掉, 这对裂纹转子的故障诊断有重要意义.

## 1 运动微分方程

考虑转轴中央具有一横向裂纹的 Jeffcott 转子, 在不考虑非线性涡动的情形下, 描述裂纹的开闭用方波函数模型并展开成傅氏级数为<sup>[3]</sup>

$$f(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \theta - \frac{2}{3\pi} \cos 3\theta + \frac{2}{5\pi} \cos 5\theta$$

其中  $\theta = \omega t + \theta_0 + \dots$

更实际的情形应考虑非线性涡动的影响, 如图 1 所示, 即描述开闭的函数为

<sup>1)</sup>国家自然科学基金资助项目.

1996-09-29 收到第一稿, 1997-07-29 收到修改稿.



$$W_{m,n} \left( t - \frac{k}{n-m} \right) = \frac{1}{\sqrt{2(n-m)}} \left( e^{i2n \left( t - \frac{k}{n-m} \right)} - e^{-i2n \left( t - \frac{k}{n-m} \right)} \right) \quad (3)$$

其中  $n, m$  为正整数,  $k$  为整数. (3) 具有如下特点:

- (1) 其频带宽为  $2(n-m)$ , 作用的时间中心在  $t = k/(n-m)$  处, 因此其时间频率特性由三个参数来描述, 这对分析信号中我们感兴趣的频带和时刻带来了极大的方便;
- (2) 不同频带在不重叠的情形下所对应的小波是相互正交的;
- (3) 相同频带但不同整数  $k$  所对应的小波是相互正交的.

对于方程 (1) 的响应, 取其中  $x$  方向的值  $x(t)$  作小波变换, 小波变换的实部和虚部分别为

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \sin \left[ 2n \left( t - \frac{k}{n-m} \right) \right] dt \quad (4)$$

$$HI = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos \left[ 2n \left( t - \frac{k}{n-m} \right) \right] dt \quad (5)$$

由 (4), (5) 式即可得到  $x(t)$  的谐波小波变换的幅值.

取一些我们感兴趣的  $(n-m)$  值, 在一系列  $k$  值下, 如果所得小波变换的幅值没有随  $k$  变化出现周期性, 则系统响应一定是混沌运动, 否则, 就是拟周期或周期解, 再通过 Poincare 映射, 可将周期解与拟周期区分开. 由此, 在系统的参数空间中可准确地确定出解的形式.

在具体运用的时候, 往往须对信号  $x(t)$  作适当变换. 如果将  $x(t)$  的时间压缩  $C$  倍, 则其频率就将增大  $C$  倍, 因此, 原来低频较窄的频带就对应着变换后较宽的频带, 即  $m, n$  均取较大的值, 且  $(n-m)$  仍有适当带宽, 而对应原信号的频带都非常集中, 以达到预期的目的.

### 3 数值计算的结果及结论

为了验证上述方法, 下面分别对两个混沌和拟周期运动进行了比较<sup>[2]</sup>. 图 2 计算了小波变换的主谐波幅值随位置参数  $t = k/(n-m)$  变化的情形. 这里, 将信号的时间压缩 100 倍, 变换后频率增大 100 倍, 取  $n = 101, m = 99$ , 则所提取的信号对应原信号中  $(0.99 \sim 1.01)$  2 频带成份, 因此可以认为它就是系统响应的主谐波成份, 由于时间压缩, 因此  $k$  的取值也相应压缩 100 倍, 本例中  $k$  的增幅为 0.01, 由此可得到图 2. 图 2 (a) ( $\epsilon = 0.0, k = 0.58, U = 0.1, \omega = 0.565$ ) 为一混沌信号通过小波变换的结果. 随  $t$  的变化, 主谐波幅值变化没有任何周期性, 从而验证了它是混沌信号. 图 2 (b) ( $\epsilon = 0.0, K = 0.4, U = 0.1, \omega = 0.62$ ) 为拟周期信号通过小波变换的结果, 随  $t$  的变化, 主谐波随  $t$  周期性地变化. 图 3 表示了三个不同位置处各频带小波变换幅值变化的情形, 图 3 (a) ( $\epsilon = 0.0, K = 0.6, U = 0.27, \omega = 0.6$ ) 表明混沌信号中,  $1 \times, 3/2 \times, 2 \times$  谐波分量所在的频带的幅值在图中的三个位置各不相同. 图 3 (b) ( $\epsilon = 0.0, K = 0.48, U = 0.1, \omega = 0.601$ ) 为拟周期运动, 各频带的小波变换幅值在图中的三个位置几乎是不变的.

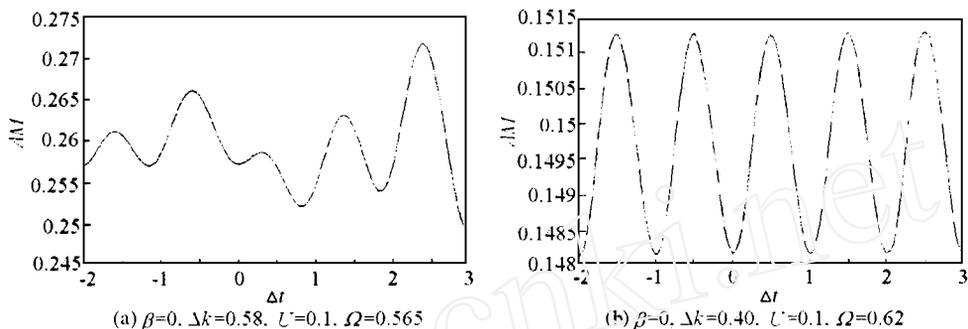


图 2 小波变换的主谐波频带幅值随位置参数  $t = k / (n - m)$  变化的情形  
 Fig. 2 WT amplitudes of main harmonic bands change with  $t = k / (n - m)$

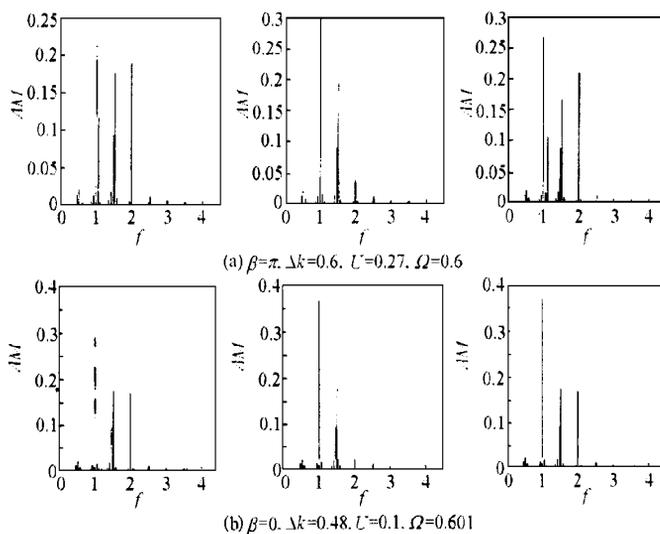


图 3 三个不同  $t$  ( $t = 0, 1, 2$ ) 处小波变换各频带幅值变化的情形  
 (a) 混沌, (b) 拟周期  
 Fig. 3 WT amplitudes of all the harmonic bands at three  $t$ 's ( $t = 0, 1, 2$ )  
 (a) Chaos, (b) Quasiperiod

用本文所提出的方法，可以清楚地看出系统解的形式随参数变化的情形。例如，在方程 (1) 中，从 0.570 2 逐渐增加到 0.573 的过程中（每步的增幅取 0.000 01），系统解的形式变化的过程为，当在 0.570 2 至 0.570 75 时，系统为周期 7 解，在 0.570 76 与 0.571 之间时，出现周期 14 解，当在 0.571 01 至 0.571 11 时，出现周期 28 解，继续增大，当 = 0.571 12 时，系统开始进入混沌，在 0.572 45 与 0.572 58 之间时，系统的运动锁相到周期 21 解，继续增大，系统完全进入了混沌状态，直到 = 0.573。为了显示这个过程的正确性，图 4 用 Poincare 图对照了这个变化过程。

图 5 在参数平面  $U - K$  解的形式变化的情形。从图 5 (a) 看，虽然拟周期与混沌之间并不存在明显的分界线，而且拟周期和混沌都可能锁相到各种周期解，但总的趋势拟周期通向混沌。图 5 (b) 反映了各种周期解在参数平面的分布情形，其周期数的分布情形符合 Farey 树规律中分母分布的特征，形成了多个“Arnol'd tongue”。

图 6 呈现了在参数平面  $U -$  解的情形。随  $U$  逐渐增加，混沌区域越来越小，并到一定

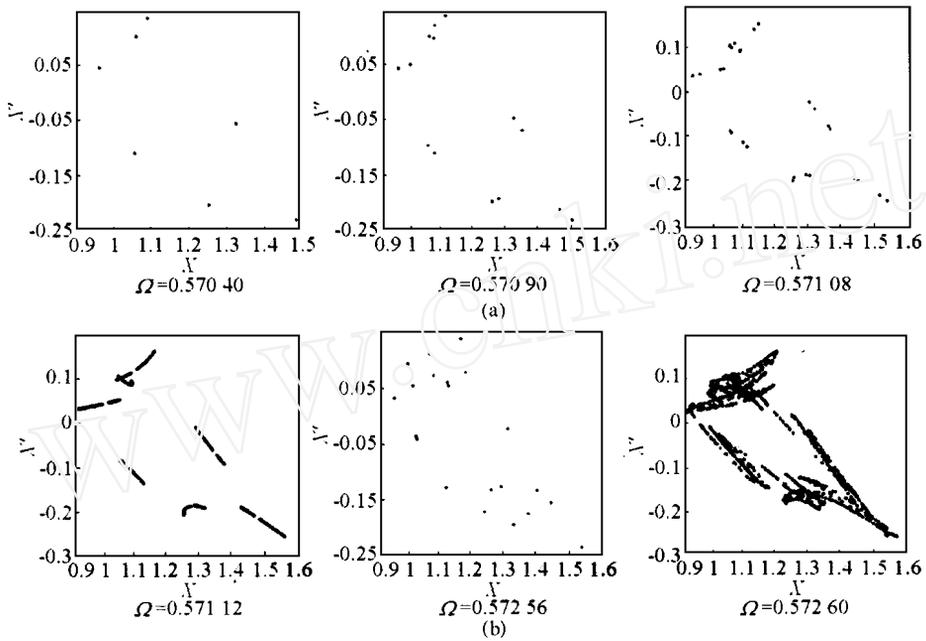


图 4 系统响应随  $\Omega$  变化解的形式变化的情形 ( $\gamma = 0.0, K = 0.56, U = 0.1$ )

Fig. 4 The types of motion vary with  $\Omega$  ( $\gamma = 0.0, K = 0.56, U = 0.1$ )

值处消失，由此看来，不平衡激励对混沌有抑制作用，我们还可以看到，随着  $U$  的增加，在混沌发生之前，拟周期运动总是先发生了，因此可以认为在这种情形下，拟周期运动进一步分叉是导致混沌的原因。

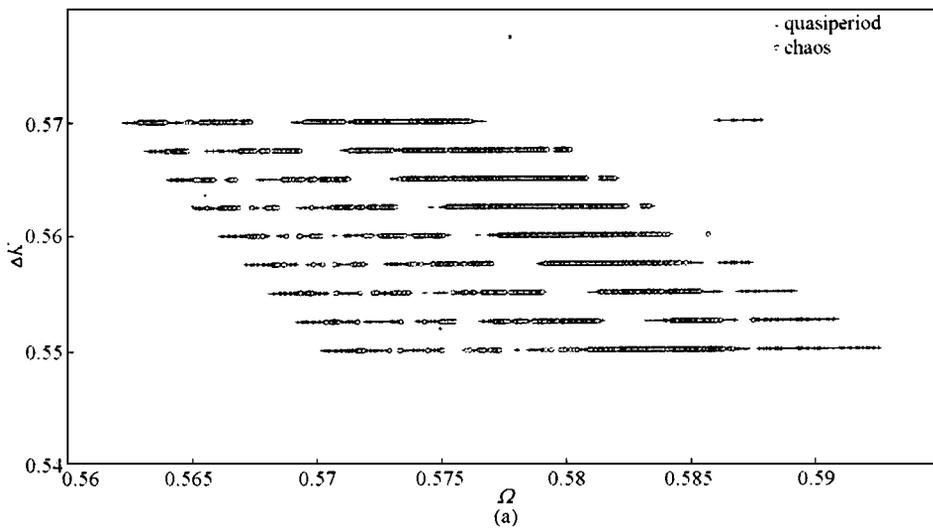


图 5 系统解的形式在  $\Omega - K$  平面上分布的情形 ( $\gamma = 0.5, U = 0.1$ )

(a) 拟周期及混沌在  $\Omega - K$  平面上分布的情形

Fig. 5 The distribution of the types of motion in  $\Omega - K$  plane ( $\gamma = 0.5, U = 0.1$ )

(a) The distribution of quasiperiod and chaos in  $\Omega - K$  plane

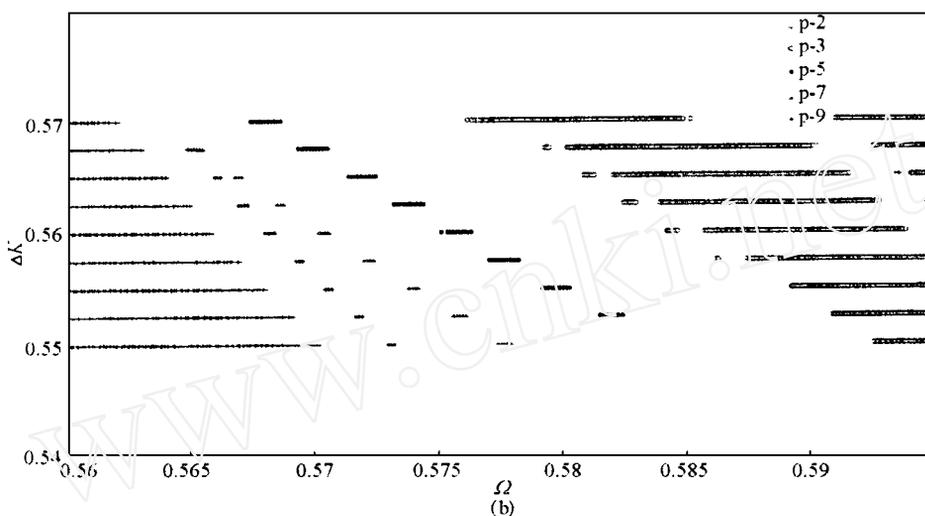


图 5 系统解的形式在  $\Omega - K$  平面上分布的情形 ( $\epsilon = 0.5, U = 0.1$ ) (续)  
 (b) 各种周期解在  $\Omega - K$  平面上分布的情形

Fig. 5 The distribution of the types of motion in  $\Omega - K$  plane ( $\epsilon = 0.5, U = 0.1$ ) (continued)  
 (b) The distribution of various of periodic motions in  $\Omega - K$  plane

由上述结果看出, 小波变换与 Poincare 映射相结合是分析非线性系统在参数空间中解的结构的有效工具, 从而可方便地揭示非线性系统的动态特性. 这种方法可推广到一般的非线性振动系统, 它比以前用计算 Liapunov 指数的方法节约了计算时间, 且容易实施, 对非线性振动系统的分析有较大意义. 这种方法同样可用于对初值空间吸引域的分析.

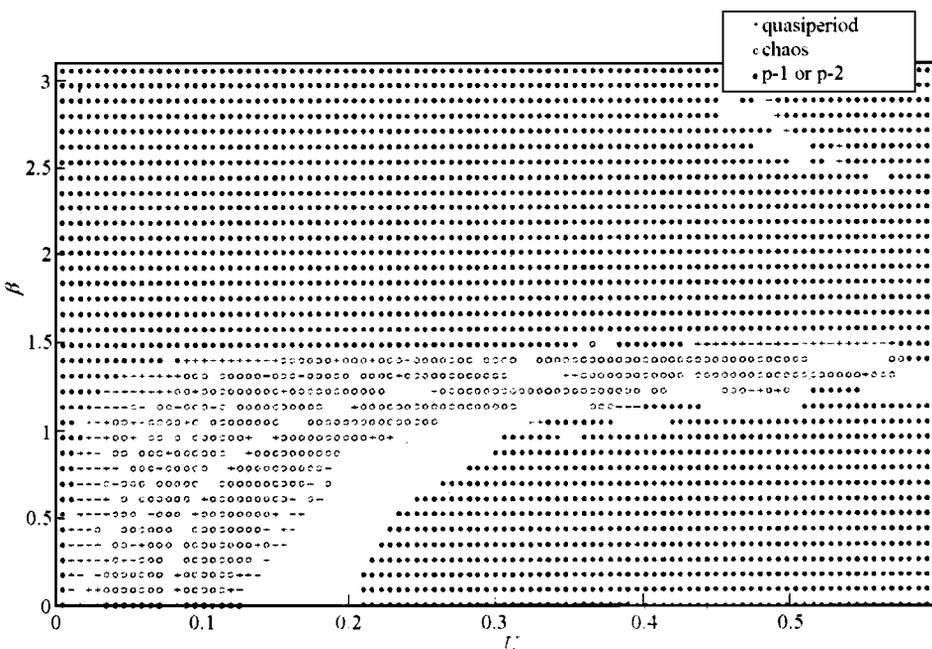


图 6 系统解的形式在  $U - \beta$  平面上分布的情形 ( $\epsilon = 0.60, K = 0.55$ )  
 (空白处对应其它形式的周期解)

Fig. 6 The distribution of types of motion in  $U - \beta$  plane ( $\epsilon = 0.60, K = 0.55$ )  
 (The null positions corresponding the other types of periodic motions)

## 参 考 文 献

- 1 Newland DE. Wavelet analysis of vibration Part 1: Theory ASME Trans. , *Journal of Vibration and Acoustics* , 1994 , 116 (3) : 409 ~ 416
- 2 郑吉兵. 裂纹转子的稳定性及分叉与混沌. 西北工业大学博士学位论文, 1996, 12 (Zheng Jibing. Stability, Bifurcation and Chaos of a Nonlinear Cracked Rotor, Ph. D. Thesis, Northwestern Polytechnical University, 1996, 12 (in Chinese))
- 3 Casch R. A survey of the dynamic behavior of a simple rotatingshaft with a transverse crack. *Journal of Sound and Vibration* , 1993 , 160 : 313 ~ 332

## A NEW METHOD OF IDENTIFYING THE TYPES OF MOTION OF A NONLINEAR CRACKED ROTOR<sup>1)</sup>

Zheng Jibing

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Meng Guang

(Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi 'an 710072, China)

**Abstract** A cracked rotor is a complicated nonlinear time - varying dynamical system and its types of motion can be periodic , quasiperiodic or chaotic when the parameters of system changes. For a given set of parameters of the system , Poincare section , power spectrum , wave form and Lyapunov exponent are usually utilized to see whether the response of the system is chaotic or not , but it is difficult to determine precisely the domains or attracting basins of different types of motions in parametric space or initial value space only from graphics study , and computing Lyapunov exponent is very time consuming. As wavelet transform can reveal local property in both time domain and frequency domain , a new method is introduced to identify the types of motions of the system , i. e. , the periodic motions can be identified by Poincare map , and harmonic wavelet transform can distinguish quasiperiod and chaos since part or all of the harmonic components of a chaotic motion can 't repeat periodically and can be noticed by the result of wavelet transform. Examples show that this method is more efficient than that of computing Liapunov exponent and can be easily applied to a nonlinear cracked rotor system.

**Key words** nonlinear vibration , rotor dynamics , chaos , wavelet transform

---

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China.