

中心小裂纹的弹塑性分析

何明元 张延宏
(中国科学院力学研究所)

摘要 用修正能量法得到含中心小裂纹平板在均匀载荷作用下的 J 积分和张开位移的全塑性解。并用弹塑性分析的工程方法得到相应的弹塑性解。结果与无限大板的解作了比较,表明当 $a/b \leq 0.05$ 时两者的差别小于 5%。而对于 $a/b > 0.05$ 的情况,把无限大板的解用于中心小裂纹的板条可能会产生较大的误差。

关键词 修正能量法, 裂纹, 平板, 弹塑性解

一、引言

实际结构中的缺陷或裂纹的尺寸与结构的其他尺寸相比常常是比较小的。例如,为了模拟实际裂纹,发展了宽板试验。在宽板试验中 a (裂纹半长) 和 b (板半宽) 之比通常在 0.1 以下。但是,常用的弹塑性应力分析手册或文献没有给出 $a/b < 0.125$ 的解。当 a/b 很小时,有限元法的计算遇到很大的困难。而对于硬化指数 n 较大的情况,当 $a/b \rightarrow 0$ 张开位移和 J 积分的解变化较大,所以用 $a/b \geq 0.125$ 的结果外推来得到 $a/b < 0.125$ 的结果是极不可靠的。文献[2,3]给出了 $a/b = 0$ (无限大板) 的结果。一些作者^[4,5]将这些结果用于小裂纹的 J 积分计算。这是很有效的近似。但是,这些文献^[4,5]没有讨论解的适用范围。

本文用修正能量法求出 $a/b \leq 0.125$ 情况下平面应变中心裂纹的 J 积分和裂纹张开位移的全塑性解,并据此求出了弹塑性解。讨论了含中心裂纹无限大板的解对于小裂纹板条的适用范围。

二、中心小裂纹的全塑性解

1. 方法和公式

考虑一个包含长为 $2a$ 的穿透裂纹宽度为 $2b$ 的宽板,远处作用着垂直于裂纹的均匀应力 S 。

下面先求全塑性解,即考虑不可压缩的纯幂硬化材料,应用小应变理论,在简单拉伸下,应力应变关系为

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1)$$

本文于 1986 年 9 月 22 日收到。

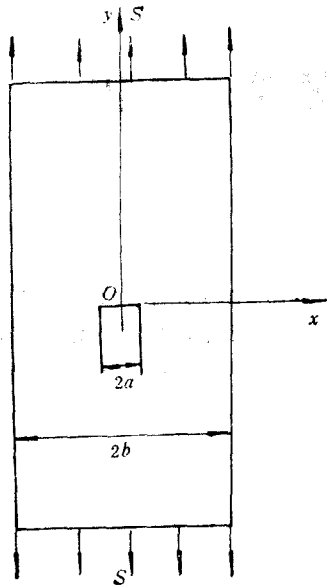


图 1.1

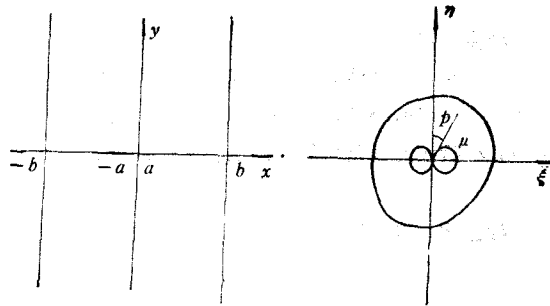


图 1.2

其中 σ_0 为屈服应力, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$, α 和 n 为材料常数. 对于一般应力状态, 应用 J_2 形变塑性理论(1)式可推广为:

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad (2)$$

其中 S_{ij} 是应力偏量, σ_e 是有效应力, 其定义为

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

令 g^∞ , ξ^∞ 和 u^∞ 表示宽为 $2b$ 的无裂纹板条在 S 作用下的均匀场, 则总应力、应变和位移场可写成:

$$g = g^\infty + \tilde{g} \quad (4)$$

$$\xi = \xi^\infty + \tilde{\xi} \quad (5)$$

$$u = u^\infty + \tilde{u} \quad (6)$$

其中 $\tilde{g}, \tilde{\xi}, \tilde{u}$ 分别为因裂纹存在而产生的附加场. 根据修正的能量原理^[2,3], 如果当 $r = (xy)^{\frac{1}{2}}$ 趋于无穷大时, 附加位移场 \tilde{u} 的减小比 $r^{-\frac{1}{2}}$ 快, 那么在所有允许的附加位移场中, 真实附加位移场将使修正势能取极小

$$\phi(\tilde{u}) = \int_V [W(\xi) - W(\xi^\infty) - \sigma_{ij}^\infty \tilde{\varepsilon}_{ij}] dV - \int_S \sigma_{ij}^\infty n_j \tilde{u}_i dS \quad (7)$$

其中 V 是裂纹外的板条, S 是裂纹表面, n 是垂直于裂纹表面指向板条区域的法线.

$$W(\xi) = \int_0^\xi \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (8)$$

上述修正势能原理是对于含裂纹的无限体推出的。但是, 不难证明, 对于本文的有限宽板条, 同样适用。

为了满足不可压缩条件, 引入流函数 $\phi(x, y)$,

$$\tilde{u}_x = \phi_{,y}, \quad \tilde{u}_y = -\phi_{,x} \quad (9)$$

为了便于选择流函数和加快数值计算的过程, 我们采用保角变换, 把裂纹外的区域变成映射平面上的单位圆(图 1.2)。把含裂纹的板条, 映射成单位圆全部的映射函数很复杂, 我们仍采用儒可夫斯基函数

$$Z = x + iy = \omega(\zeta) = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (10)$$

映射函数(10)把裂纹映射成单位圆周, 边界 $x = b$ 映射成小圆周

$$\mu = \frac{b}{a \sin \varphi} - \sqrt{\left(\frac{b}{a \sin \varphi} \right)^2 - 1} \quad (11)$$

裂纹外的板带区域映射成单位圆与曲线之间的区域。

采用和无限大板情况相同的流函数^[2]

$$\phi(\mu, \phi) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M A_{kj} \left[\mu^{j-1} \sin 2k\phi - (-1)^k 2k \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (12)$$

把(12)式和相应的公式代入修正势能 $\phi(\tilde{u})$, 并求极值, 可得到待定系数 A_{kj} 。计算细节类似于文献[2,3], 求出 $\phi(\tilde{u})$ 后, 根据定义求出 J 积分值

$$J = -\frac{1}{2} \frac{dPE}{da} = -\frac{1}{2} \frac{d\phi_{\min}}{da} \quad (13)$$

即计算两个不同裂纹长度 $a - \frac{1}{2} \Delta a$ 和 $a + \frac{1}{2} \Delta a$ 时的 ϕ 值, 然后根据上式求出 J 积分值。

采用下列无量纲公式表示 J 积分和裂纹中心的张开位移 δ

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{a \varepsilon_c^2 \sigma_c^2} &= h_1(n) \\ \frac{\delta}{\varepsilon_c a} &= h_2(n) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这种无量纲表示法与施春风在文[1]中采用的不一样, 施的无量纲公式对于 $a/b > 0.25$ 情况是非常适用的。但是, 当 $a/b < 0.25$, 施所采用的无量纲 J 积分和张开位移变化很剧烈。在使用内插法时增加了困难^[4]。无量纲化公式(14)在 $a/b \leq 0.125$ 的范围内能给出变化平缓的曲线。施春风的无量纲 J 积分 h_{11} 和无量纲张开位移 h_{22} 和本文的 h_1 和 h_2 的关系为:

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= h_1 \left(1 - \frac{a}{b} \right)^2 \\ h_{22} &= h_2 \left(1 - \frac{a}{b} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2. 与有限元计算结果的比较

为了和文献[1]的结果进行比较,我们用修正能量法计算了 $a/b = 0.125$ 的情况,表 1 给出了两者结果的比较,结果表明,两者符合得很好. 而对于 $a/b = 0$ 的情况,文献[3]已求出 J 积分的上、下限,说明修正能量法的结果是相当准确的. 因此,我们可以认为对于 $0 \leq a/b \leq 0.125$ 用修正能量法所得的结果是相当准确的.

表 1 修正能量法的结果与有限元结果的比较, $a/b = 0.125$

		$n=1$	2	3	5	7	10
$h_1 = \frac{J}{ae_0^2 \sigma_0^2}$	修正能量法(本文)	3.179	4.658	5.995	8.604	11.35	15.46
	有限元法 ⁽¹⁾	3.20	4.72	6.06	8.48	11.0	15.3
$h_2 = \frac{\delta}{ae_0^2}$	修正能量法(本文)	3.483	4.757	5.861	7.946	10.01	13.11
	有限元法	3.49	4.73	5.84	7.92	10.0	13.5

3. 计算结果

表 2 和图 2、3 分别给出了 $a/b = 0.05, 0.10$ 和 0.125 的 h_1 和 h_2 的计算结果, 为了便于参考,表中也列入了 $a/b = 0$ 的结果.

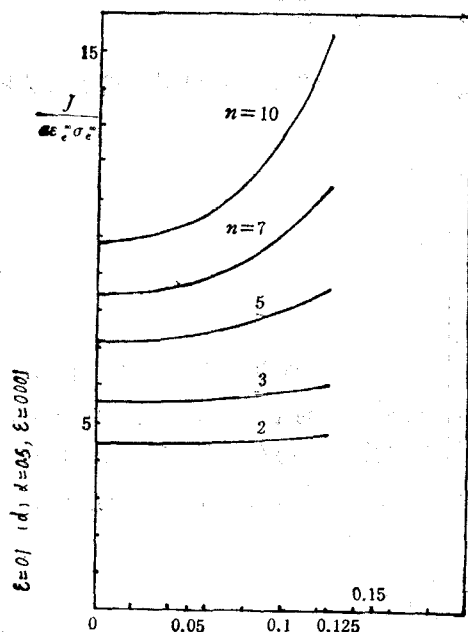


图 2 $J/ae_0^2 \sigma_0^2$ 与 a/b 的关系曲线

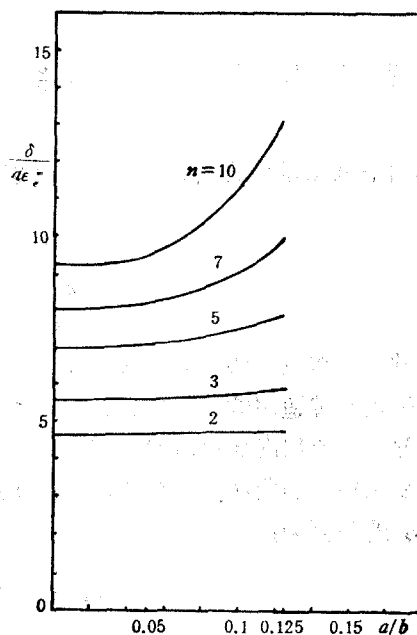


图 3 δ/ae_0^2 与 a/b 的关系曲线

表 2 $\frac{J}{a\epsilon_0^2\sigma_0^2}$ 和 $\frac{\delta}{a\epsilon_0}$ 的计算结果

	a/w	n	h_1, h_2					
			1	2	3	5	7	10
$h_1 = \frac{J}{a\epsilon_0^2\sigma_0^2}$	0.125		3.179	4.658	5.995	8.604	11.35	15.46
	0.100		3.164	4.583	5.805	8.008	10.06	12.71
	0.050		3.146	4.490	5.565	7.274	8.860	10.34
	0		3.141	4.470	5.511	7.152	8.421	9.870
$h_2 = \frac{\delta}{a\epsilon_0}$	0.125		3.483	4.757	5.861	7.946	10.01	13.11
	0.100		3.475	4.705	5.725	7.497	9.099	11.30
	0.050		3.465	4.671	5.595	7.054	8.166	9.475
	0		3.463	4.650	5.561	6.947	7.999	9.215

三、中心小裂纹的弹塑性解

在上节求得的全塑性解的基础上, 我们用 Shih 和 Hutchinson 提出的工程方法^[7,8] 求出中心小裂纹的弹塑性解。

在单向拉伸时, 材料的应力应变关系用 Ramberg-Osgood 公式表示

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (16)$$

Shih 和 Hutchinson^[7,8] 提出对于应力应变关系由(16)式给出的材料, J 积分和裂纹张开位移可近似由下式给出

$$\begin{aligned} J &= J_e(a_e) + J_p(a, n) \\ \delta &= \delta_e(a_e) + \delta_p(a, n) \end{aligned} \quad (17)$$

其中 J_e 和 δ_e 为考虑塑性修正的弹性解, J_p 和 δ_p 是上节给出的全塑性解。 a_e 由下式给出

$$a_e = a + \phi r_y \quad (18)$$

其中

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left[\frac{n-1}{n+1} \right] \left(\frac{K_1}{\sigma_0} \right)^2 \quad (19)$$

$$\phi = \frac{1}{1 + \left(\frac{P}{P_0} \right)^2} \quad (20)$$

对于图 1 所示的有限宽板, K_1 值为

$$K_1 = F \left(\frac{a}{b} \right) S \sqrt{\pi a}$$

$$\delta_e = \frac{4Sa}{E} (1 - \nu^2) V_1(a/b) \quad (21)$$

$F(a/b)$ 和 $V_1(a/b)$ 由[9]给出, 可表示成下式:

$$F(a/b) = \left\{ 1 - 0.025 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right\} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2b}} \quad (22)$$

$$V_1(a/b) = -0.071 - 0.535(a/b) + 0.169(a/b)^2 \\ + 0.020(a/b)^3 - 1.071 \frac{1}{a/b} \ln(1 - a/b)$$

把(18)–(21)和(14)代入(17),经过整理得到

$$\frac{J}{J_{e1}} = 1 + \frac{\left(\frac{S}{\sigma_0} \right)^2 F^2 \left(\frac{a}{b} \right)}{6 \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{S}{\sigma_0} \right)^2 \right)} \frac{(n-1)}{(n+1)} \\ + \frac{3\alpha}{4(1-\nu^2)F^2 \left(\frac{a}{b} \right) \pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S}{\sigma_0} \right)^{n-1} h_1(n, a) \quad (23)$$

$$\frac{\delta}{\delta_{e1}} = 1 + \frac{\left(\frac{S}{\sigma_0} \right)^2 F^2 \left(\frac{a}{b} \right)}{6 \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{S}{\sigma_0} \right)^2 \right)} \frac{(n-1)}{(n+1)} \\ + \frac{\sqrt{3} \alpha}{8(1-\nu^2)V_1 \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S}{\sigma_0} \right)^{n-1} h_3(n, a) \quad (24)$$

其中 J_{e1} 和 δ_{e1} 是不考虑塑性修正的弹性解。

作为例子,图4和图5给出了当 $\alpha = 1$, $\frac{a}{b} = 0.1$ 时的 J/J_{e1} 和 δ/δ_{e1} 随 S/σ_0 的变化曲线。为了比较,图中也给出了 $a/b = 0$ 时的曲线,结果表明,当 $n > 3$ 时,两者的差别是比较大的。表3列出了 $n = 7$ 和 10 , $a/b = 0, 0.05$ 和 0.10 时的 J/J_{e1} 值, $a/b = 0.05$ 的结果与 $a/b = 0$ 时的结果相差小于 5% , 而 $a/b = 0.10$ 的结果与 $a/b = 0$ 的结果相差大于 10% 。因此,当 $a/b \leq 0.05$ 时,用 $a/b = 0$ 的结果是足够准确的, 而当 $a/b > 0.05$ 时,应使用本文给出的小裂纹解。

表3 不同 a/b 的 J/J_{e1} 的比较

		$a/b = 0$	$a/b = 0.05$	$a/b = 0.10$
$n = 7$	$S/\sigma_0 = 1.2$	3.869	4.006	4.372
	$S/\sigma_0 = 1.4$	8.116	8.459	9.383
$n = 10$	$S/\sigma_0 = 1.2$	4.754	4.918	5.753
	$S/\sigma_0 = 1.4$	15.26	16.41	19.75

α 值将显著影响 J/J_{e1} 和 δ/δ_{e1} 的结果,图6和图7给出了 $\alpha = 0.5$ 的计算结果

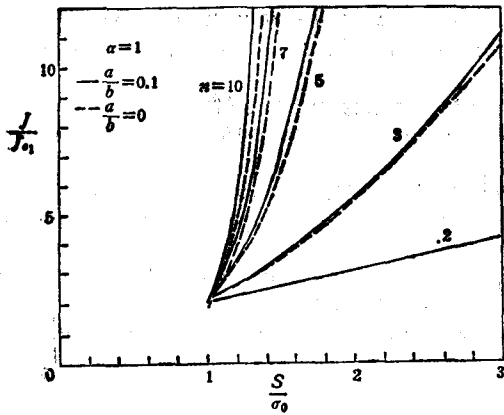


图 4 中心小裂纹板条 J/J_{e1} 与 S/σ_0 的关系曲线

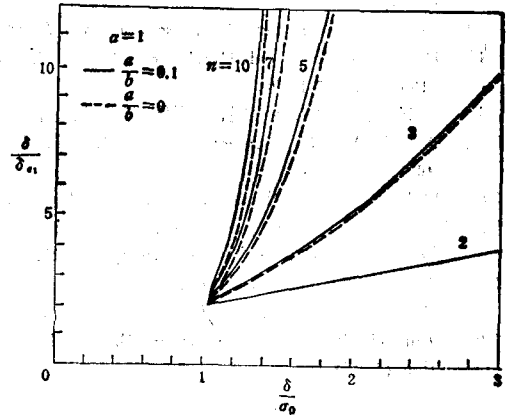


图 5 中心小裂纹板条 δ/δ_{e1} 与 S/σ_0 的关系曲线

四、结 论

1. 修正能量法可有效地用于 a/b 很小的有限宽板条的全塑性解。
2. 对于 $a/b \leq 0.05$ 的小中心裂纹可用无限大板 ($\frac{a}{b} = 0$) 的计算结果。其误差不超过 5%。
3. 对于 $0.125 > a/b > 0.05$ 的小中心裂纹,可用本文给出的结果来计算 J 积分和裂张开位移。

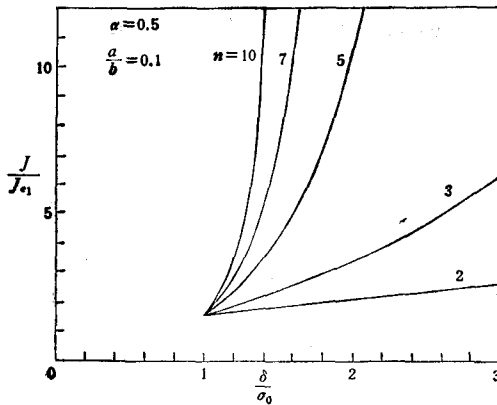


图 6 中心小裂纹板条 J/J_{e1} 与 S/σ_0 的关系曲线

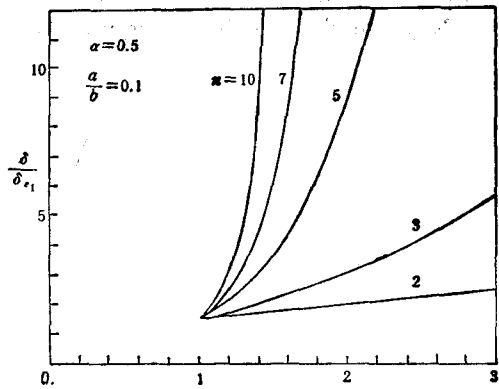


图 7 中心小裂纹板条 δ/δ_{e1} 与 S/σ_0 的关系曲线

参 考 文 献

- [1] Kumar, V., German, M. D. and Shih, C. F., An Engineering Approach for Elastic-Plastic Fracture Analysis, NP-1931, Research Project 1237-1, Prepared for Electric Power Research Institute, Palo Alto, Calif

- (1981).
- [2] He, Ming Yuan and Hutchinson, J. W., *Journal of Applied Mechanics*, 48(1981), 830—840.
 - [3] He, Ming Yuan and Hutchinson, J. W., ASTM STP803 American Society for Testing and Materials (1983), I-277-I-290.
 - [4] 蔡其巩、陈宪禧、金志英, CPVI 安全设计曲线的理论依据, 钢铁研究总院科技报告.
 - [5] Wilson, W. K., J.-integral estimate for Small Edge and Interior Cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, 20(1984), 655—665.
 - [6] Shih, C. F. and Needleman, A., *Journal of Applied Mechanics*, 51(1984), pp. 48—56.
 - [7] Shih, C. F., J.-integral Estimates for Strain Hardening Materials in Antiplane Shear Using Fully Plastic Solutions, ASTM STP 590 (1967), 3—22.
 - [8] Shih, C. F. and Hutchinson, J. W., Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates For Plane Stress Crack Problems, *J. Engng. Mat. Techn.* 98(1976), 289—295.
 - [9] Tade H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation (1973).

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF CENTRAL SHORT CRACKS

He Mingyuan Zhang Yanhong

(*Institute of mechanics, Academia Sinica*)

Abstract Fully plastic solutions of J integral and Crack Opening Displacement for panels with a central short crack under the action of a uniform load are obtained by the modified energy method. The corresponding elastic-plastic solutions are also obtained by the engineering method of elastic-plastic analysis. The comparison of the obtained results with those of infinite bodies shows that the difference is within 5% when $a/b < 0.05$. On the other hand, in the case that $a/b > 0.05$, the error may not be negligible if the solutions for infinite bodies are used for panels with central short cracks.

Key words modified energy method, crack, panels, elastic-plastic solutions