

跨音叶栅流场中 Euler 方程的 对角化隐式算法

陈永亮 沈孟育 黄东涛
(清华大学工程力学系)

摘要 本文在非因式分解隐式通量分裂有限面积法的基础上,提出了一种单向隐式对角化算法,并给出了相应的固壁边界条件的一种精确的隐式处理方法。数值结果表明,这种方法是高效率的。

关键词 隐式,通量分裂,对角化

1. 引言

目前,在叶轮机流场计算中,对于三维问题还没有一种非常有效的计算方法。提高算法的效率已成了问题的关键。1985年, R. W. MacCormack^[1] 提出了隐式通量分裂有限体积法,采用 G-S 线迭代,只需 30—40 个时间步即可得到定常解。文献[2]对此进行了研究和改进。在这个算法中,需求解块三对角方程,因此单步计算时间较长。在有些研究工作中,对于近似因式分解方法中所遇到的类似问题采用了对角化技术^[3,4]。结果证明,一般可节省 40—50% 的计算量。我们这里对这种技术作了尝试。因为对于文献[2]中的方法,系数矩阵不可能对角化,故采用了单向隐式,这样势必影响算法的稳定性,收敛步数将增加。只有当收敛步数的增加不影响总的计算量减少时,这种处理才是有益的。这里一个值得注意的问题是壁面边界的隐式处理。文献[3]中的办法是当特征线由外部指向控制体内时,采用齐次 Dirichlet 条件;当特征线由控制体指向外部时,采用齐次 Neumann 条件。而我们则通过对壁面边界条件的分析,给出了精确的隐式处理方法,我们认为,本算法中收敛步数没有增加过多即归因于此。总计算量比文献[2]中约少 20% 左右。目前的工作暂限于二维。

2 问题的提法

1) 控制方程

二维 Euler 方程为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

其中

本文于 1989 年 2 月 23 日收到, 1990 年 2 月 28 日收到修改稿。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2)$$

在实际计算中,对方程进行了无量纲化,其形式保持不变。

2) 边界条件

(1) 进出口

进口: 轴向亚音时通常规定总压 p_1 , 总温 T_1 和进气角 β_1 。 轴向超音时规定全部流动参数。

出口: 轴向亚音时通常规定背压 p_2 。 轴向超音时不提任何边界条件。

(2) 固壁 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$

(3) 周期性边界 规定周期性条件。

3. 隐式通量分裂有限体积法

文献[2]中给出了在一般坐标系 (ξ, η) 中, 隐式通量分裂有限体积法的计算格式:

$$\frac{\partial U_{ij}^{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{A_{ij}} [(A'U|S|)_{i+\frac{1}{2},j} - (A'U|S|)_{i-\frac{1}{2},j}]^{n+1} + \frac{1}{A_{ij}} [(B'U|S|)_{i,j+\frac{1}{2}} - (B'U|S|)_{i,j-\frac{1}{2}}]^{n+1} = 0$$

其中 A_{ij} 表示计算网格单元的面积, A' 、 B' 为 (ξ, η) 坐标系中通量的 Jacobi 矩阵。

经线化和通量分裂后的离散形式为:

$$\begin{aligned} \delta U_{ij}^{n+1} + \frac{\Delta t}{A_{ij}} [(B'_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \delta U_{ij}^{n+1} + B'_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \delta U_{i,j+1}^{n+1}) \cdot |S_{j+\frac{1}{2}}| \\ - (B'_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \delta U_{i,j-1}^{n+1} + B'_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \delta U_{ij}^{n+1}) \cdot |S_{j-\frac{1}{2}}| + (A'_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \delta U_{ij}^{n+1} \\ + A'_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \delta U_{i+1,j}^{n+1}) \cdot |S_{i+\frac{1}{2}}| - (A'_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \delta U_{i-1,j}^{n+1} \\ + A'_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \delta U_{ij}^{n+1}) \cdot |S_{i-\frac{1}{2}}|] = \Delta U_{ij}^n \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n$,

$$\begin{aligned} \Delta U_{ij}^n = - \frac{\Delta t}{A_{ij}} [(A'_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + A'_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}) \cdot |S_{i+\frac{1}{2}}| \\ - (A'_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + A'_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) \cdot |S_{i-\frac{1}{2}}| \\ + (B'_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + B'_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \cdot |S_{j+\frac{1}{2}}| \\ - (B'_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + B'_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \cdot |S_{j-\frac{1}{2}}|] \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 由 U_{ij}^n 和 $U_{i-1,j}^n$ 插值得出, $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 由 $U_{i+1,j}^n$ 和 $U_{i+2,j}^n$ 插值得出,等等。

4. 对角化

为了达到对角化的目的,我们采用了单向隐式。例如,我们在 η 向取隐式:

$$\delta U_{ij}^{n+1} + \frac{\Delta t}{A_{ij}} [(B'_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \delta U_{ij}^{n+1} + B'_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \delta U_{i,j+1}^{n+1}) \cdot |S_{j+\frac{1}{2}}|$$

$$- (B'_{i,j-\frac{1}{2}} \delta U_{i,j-1}^{n+1} + B'_{i,j-\frac{1}{2}} \delta U_{i,j}^{n+1}) \cdot |S_{i-\frac{1}{2}}| = \Delta U_{ij}^n \quad (4)$$

此时 ΔU_{ij}^n 用(3)式计算, 但上标“ n ”与一般的不同, 当该处 $(n+1)$ 时刻值未知时, $(\)^*$ 取 n 时刻值, 若该处 $(n+1)$ 时刻值已知, 则 $(\)^*$ 取 $(n+1)$ 时刻值。

在隐式部分, 近似认为 $B'_{ij} \doteq B'_{i,j+\frac{1}{2}} \doteq B'_{i,j-\frac{1}{2}}$, 因为定常解的精度只取决于显式部分, 所以这种近似不影响解的精度。

对于 B' , 有 $B' = T_{B'}^{-1} \Lambda_{B'} T_{B'}$

相应地, $B'^+ = T_{B'}^{-1} \Lambda_{B'}^+ T_{B'}$, $B'^- = T_{B'}^{-1} \Lambda_{B'}^- T_{B'}$

在(4)两端乘以 $T_{B'}$, 并令 $W^{n+1} = T_{B'} \delta U^{n+1}$, 得:

$$W_{ij}^{n+1} + \frac{\Delta t}{A_{ij}} \cdot |S_{i+\frac{1}{2}}| (\Lambda_{B'}^+ W_{ij}^{n+1} + \Lambda_{B'}^- W_{i,j+1}^{n+1}) \\ - \Delta t / A_{ij} |S_{i-\frac{1}{2}}| (\Lambda_{B'}^+ W_{i,j-1}^{n+1} + \Lambda_{B'}^- W_{ij}^{n+1}) = T_{B'} \Delta U_{ij}^n$$

相应的标量化方程为:

$$- \left(\frac{\Delta t}{A_{ij}} \cdot |S_{i-\frac{1}{2}}| \lambda_{B',l}^+ \right) W_{i,j-1}^{n+1(l)} + \left[1 + \frac{\Delta t}{A_{ij}} (\lambda_{B',l}^+ |S_{i+\frac{1}{2}}| - \lambda_{B',l}^- |S_{i-\frac{1}{2}}|) \right] W_{ij}^{n+1(l)} \\ + \frac{\Delta t}{A_{ij}} \cdot |S_{i+\frac{1}{2}}| \lambda_{B',l}^- W_{i,j+1}^{n+1(l)} = (T_{B'} \cdot \Delta U_{ij}^n)^{(l)} \quad (l = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

类似地, 可得到 ξ 向隐式的方程:

$$A_l^{\xi} \cdot \bar{W}_{i-1,j}^{n+1(l)} + B_l^{\xi} \cdot \bar{W}_{ij}^{n+1(l)} + C_l^{\xi} \cdot \bar{W}_{i+1,j}^{n+1(l)} = D_l^{\xi} \quad (6)$$

其中, $\bar{W}^{n+1} = T_{A'} \delta U^{n+1}$, $A_l^{\xi} = - \frac{\Delta t}{A_{ij}} |S_{i-\frac{1}{2}}| \lambda_{A',l}^+$, $C_l^{\xi} = \frac{\Delta t}{A_{ij}} \cdot |S_{i+\frac{1}{2}}| \lambda_{A',l}^-$, $B_l^{\xi} = 1 + \frac{\Delta t}{A_{ij}} (\lambda_{A',l}^+ |S_{i+\frac{1}{2}}| - \lambda_{A',l}^- |S_{i-\frac{1}{2}}|)$, $D_l^{\xi} = (T_{A'} \cdot \Delta U_{ij}^n)^{(l)}$.

这样, 我们既可以用单向隐式格式, 也可用双向交替隐式格式计算。

5. 边界数值处理

下面仅对 η 向取隐式的情况进行讨论。

1) 出口和进口

出口: 轴向超音时, 全部流动参数由内场外推得出; 轴向亚音时, p_2 给定, ρ , u , v , 由内场外推得出, 于是, 所有流动参数都可由此算出。

进口: 轴向超音时, 规定了全部流动参数, 故该处不必进行计算; 轴向亚音时, 规定了 p_1 , T_1 , β_1 , u 由内场值外推得出, 这样即可算出所有流动参数。

2) 周期性边界 直接应用周期性条件。

3) 壁面边界 为了能获得精确的壁面隐式处理关系式, 我们在壁面上布置计算点, 这是与通常的有限体积法中的计算点取法是不同的。在计算壁面点时, 在壁面点以外补充一排点, 其值是由外推得出的, 用于壁面点的方程右端显式项的计算。

在壁面上, 有 $\lambda_1 = S_2^{0(\xi)} u + S_3^{0(\xi)} v = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\lambda_2 = c > 0$, $\lambda_3 = \lambda_1 = 0$, $\lambda_4 = \lambda_1 - c = -c < 0$, 因此, 在求解 $w^{(1)}$, $w^{(3)}$ 时不需补充条件, 因为这两个分量方程中 $w_{i,j-1}$ 和 $w_{i,j+1}$ 的系数全为零。对于 $w^{(2)}$ 和 $w^{(4)}$, 在吸力面上 $\lambda_2^+ = c$, $\lambda_2^- = 0$, 故 $w^{(2)}$ 的方程不能用, 在压力面上, $\lambda_4^+ = 0$, $\lambda_4^- = -c$, 因此 $w^{(4)}$ 的方程不能用。在这两个面上, 有条件 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。我们将由此得出有关 $w^{(2)}$ 和 $w^{(4)}$ 的关系式。

令 $S_x^{0(\xi)} = a, S_y^{0(\xi)} = b,$

$$\text{则} \left. \begin{aligned} au + bv &= 0 \\ a\rho u + b\rho v &= 0 \\ a\delta\rho u + b\delta\rho v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

按定义, $\delta U = T_p^{-1}W,$

$$\text{即:} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta\rho u \\ \delta\rho v \\ \delta E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ u & \frac{u+ac}{2c^2} & -b\rho & \frac{u-ac}{2c^2} \\ v & \frac{v+bc}{2c^2} & a\rho & \frac{v-bc}{2c^2} \\ \alpha & \frac{\alpha+v'c}{2c^2} + \frac{1}{2\beta} & \rho(av-bu) & \frac{\alpha-v'c}{2c^2} + \frac{1}{2\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(2)} \\ w^{(3)} \\ w^{(3)} \\ w^{(4)} \end{pmatrix}$$

其中 $v' = au + bv, \alpha = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \beta = \gamma - 1$

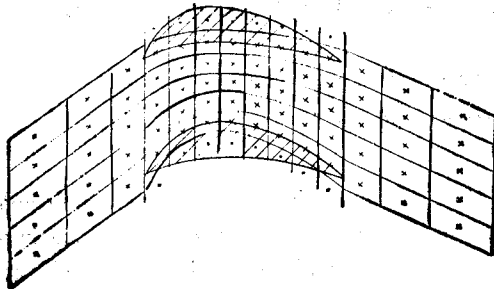
取其中第 2, 3 行的等式, 并将它们代入(7)中, 整理可得: $w^{(3)} = w^{(4)}$, 将这个方程与该截面上所有 $w^{(2)}$ 和 $w^{(4)}$ 的方程联立, 可得一个有关 $w^{(2)}, w^{(4)}$ 的循环三角方程。其形式为:

$$\begin{pmatrix} \times \times \\ \times \times \times \\ \dots \\ 0 & 1 & -1 \\ & 0 & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \dots \\ & & & & \times & \times & \times \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{jL}^{(2)} \\ w_{jL-1}^{(2)} \\ \vdots \\ w_2^{(2)} \\ w_2^{(4)} \\ \vdots \\ w_{jL-1}^{(4)} \\ w_{jL}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ 0 \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ 0 \end{pmatrix}$$

这样就完成了壁面的隐式处理。

6. 算例

我们采用文献[2]中的 H 型网格, 对文献[5]中的 A_2 喷管和文献[6]中的 624 叶栅进



× 计算点 × 壁面边界计算点
● 壁面边界外延的辅助计算点

图 1 网格分布示意图

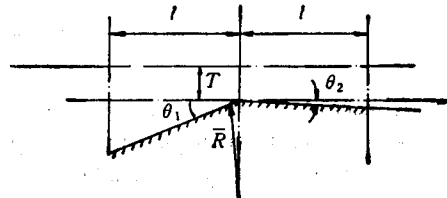
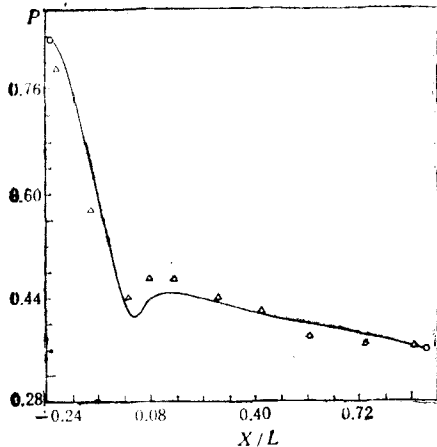
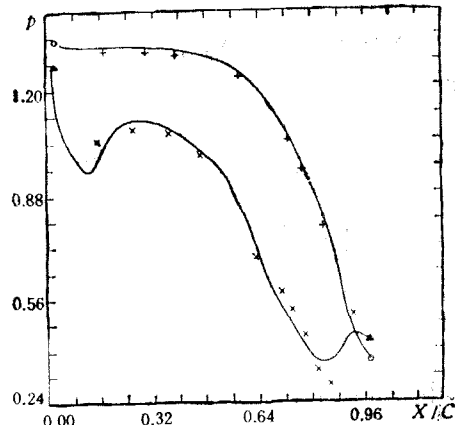


图 2 A_2 喷管

行了计算。计算结果表明,本算法具有较高的效率,得出的结果与实验结果符合较好,参见图3和图4。



○: 计算值 △: 实验值
图3 A₂喷管壁面压力曲线



○—P.C ▲—S.C +—P.F ×—S.E
图4 壁面压力曲线(624叶栅)

参 考 文 献

- [1] McCormack, R. W., Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations, AIAA paper 85-0032, (1985).
- [2] 沈孟育、黄东海、张耀科,平面跨音速叶栅粘性绕流的数值模拟,第二届计算空气动力学年会论文集, (1988).
- [3] Thomas, H. Pulliam, Joseph L. Steger, Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms, Submitted to AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nev. (1985).
- [4] David, A. Caughey, Diagonal Implicit Multigrid Algorithm for the Euler Equations, *AIAA Journal*, (July, 1988).
- [5] Mason, M. L., Putnam, L. E. and Richard, J. Re. The Effect of Throat Contouring on Two-Dimensional Converging-Diverging Nozzles at Static Conditions, NASA TP-1704, (1980).
- [6] 刘绍中,平面叶栅跨音速绕流计算的加速收敛和边界处理,清华大学硕士论文(1981).

DIAGONAL IMPLICIT ALGORITHM FOR THE EULER EQUATIONS IN THE TRANSONIC CASOADE FLOW FIELD

Chen Yongliang Shen Mengyu Huang Dongtao

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University)

Abstract Based on the unfactored implicit flux-splitting finite area algorithm, a diagonal form one-way implicit algorithm for the Euler Equations is presented and an accurate implicit numerical treatment for boundary conditions on the wall is given in this paper. The numerical results have shown that this algorithm is efficient.

Key words implicit, flux-splitting, diagonal algorithm