

轴对称冲击有限元一致质量矩阵迭代解¹⁾

宋顺成

(西南交通大学应用力学系,成都 610031);
兵器工业五二研究所,包头 014034)

摘要 给出高速冲击动力有限元一致质量矩阵解的迭代过程,即把集总质量矩阵解作为初值进行有限次迭代得到满足工程需要的一致质量矩阵近似解.实际算例说明,一致质量近似解较集总质量解改善了对应力波传播过程的分析,而且在高速冲击计算中能给出与实验接近的计算结果.

关键词 高速冲击,动力有限元,质量矩阵

引言

在动力有限元计算中质量矩阵有两种形成方法.一种是集总(lumped)质量法,另一种是一致(consistent)质量法.一致质量法是通过有限元平衡方程计算得到质量矩阵,该质量矩阵与所用的形函数一致.一致质量矩阵与刚度矩阵具有相同的稀疏性和带宽,给显示积分带来很大困难.集总质量法得到的是对角形质量矩阵,它具有某种任意性.在一般情况下,尽管这两种矩阵形式不同,但能给出接近的计算结果.不过,情况并非总是如此,有些情况下集总质量具有较大的误差^[1].为改进集总质量解,人们探讨了各种集总质量方法^[2].

高速冲击动力有限元的计算,特别是对侵彻过程的计算,往往包含成千上万步时间积分,严格按一致质量求解由于机时原因成为不可能.钱伟长曾推导出对角形一致质量矩阵^[3],但由于人力、物力的原因至今未能给出实用程序.

本文在现有冲击有限元程序基础上,给出一致质量迭代格式.在每步时间积分之前,先求出集总质量解,然后用迭代法修正,求得全部或部分区域内一致质量的近似解.计算事例说明,该一致质量近似解改善了对应力波传播过程的分析,而且在应用于高速冲击有限元计算中能给出与实验较一致的计算结果.

1 一致质量矩阵及运动方程

文献[4]指出,对于轴对称冲击变形问题,使用三角形单元较四边形单元更合适.如图1是特征三角形单元与 (r, z) 坐标面交截的一个三角形123.单元结点坐标分别为 $(r_1, z_1), (r_2, z_2), (r_3, z_3)$.引用面积坐标 L_1, L_2, L_3 为形函数,即

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 r + c_1 z) \\ L_2 &= \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 r + c_2 z) \\ L_3 &= \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 r + c_3 z) \end{aligned} \right\} me$$

¹⁾国家自然科学基金资助项目(19772042).

1996-04-24收到第一稿,1997-07-14收到修改稿.

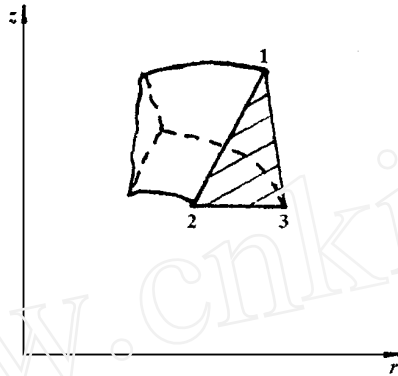


图1 三角形单元

Fig.1 Triangular element

其中 A 是三角形单元截面的面积, a_1, b_1, c_1 分别为 $a_1 = r_2 z_3 - r_3 z_2, b_1 = z_2 - z_3, c_1 = r_3 - r_2$ 并轮换角码 1, 2, 3 得到 $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ 等.

定义 N 为

$$N = I(L_1, L_2, L_3) \quad (1.2)$$

其中 I 为二阶单位矩阵.

根据虚功原理, 三角形单元的特征平衡方程为

$$\begin{aligned} \text{有较} \quad & 2 \left[\int_e \ddot{u} r u \, dr \, dz + \int_e \ddot{w} r w \, dr \, dz = \text{差} \right. \\ & - 2 \left[\int_e r \frac{\partial(\sigma_r)}{\partial r} r \, dr \, dz + \int_e r z \frac{\partial(\sigma_z)}{\partial z} r \, dr \, dz + \int_e \tau_{rz} \frac{\partial(u)}{\partial z} r \, dr \, dz - \text{式} \right. \\ & \left. 2 \left[\int_e z \frac{\partial(\tau_{rz})}{\partial z} r \, dr \, dz + \int_e r z \frac{\partial(\tau_{rz})}{\partial r} r \, dr \, dz \right. \right. \quad \left. \left. \text{点坐} \right. \right. \quad (1.3) \end{aligned}$$

若单元材料密度 ρ 为常数, 由 (1.3) 式及插值位移、位移加速度模式得单元一致质量矩阵

$$M^e = 2 \int_e \bar{r} N^T N \, dr \, dz \quad (1.4)$$

或

$$M_{rs}^e = 2 \int_e \bar{r} L_r L_s \, dr \, dz \quad (r, s = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

其中 \bar{r} 是单元的中心半径.

对 (1.5) 式积分有

$$L_r L_s \, dr \, dz = \begin{cases} \frac{1}{6} A & (r = s) \\ \frac{1}{12} A & (r \neq s) \end{cases}$$

如果令 $2 \bar{r} A = Q^e$ 则得到如下单元一致质量矩阵.

$$M^e = \frac{Q^e}{3} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

不难发现,该单元一致质量矩阵是对称、正定的实数矩阵.

利用给定的几何方程、本构关系、状态方程,由式(1.3)及插值位移、位移加速度模式不难给出单元结点力矢量 F^e ,并得到单元上的运动方程^[5]

$$M^e U^e = F^e \quad (1.8)$$

按一般规则,将各单元的运动方程集合在一起可以得到整体结点的运动方程,即

$$M U = F \quad (1.9)$$

求解(1.9)式获得加速度矢量,从而经显示积分得各结点在 $t + \Delta t$ 时的位移速度和位移等.

2 一致质量的一般迭代法

求解式(1.9)方法很多,如上所述严格求解没有实用性.因此,宁可使用迭代过程求其近似解.在(1.9)式中一致质量矩阵 M 是带状、稀疏矩阵.考察(1.7)式的集合过程不难发现,当结点 j 与结点 i 不相邻时, $m_{ij} = 0$,若定义

$$m_{ij}^{(e)} = m_{ij}^{(e)} / \sum_i m_{ii}^{(e)} \quad (2.1)$$

则有

$$\sum_j m_{ij}^{(e)} = 1 \quad (2.2)$$

其中 \sum_i 同上标 (e) 一起表示与结点 i 相连的各单元对 i 求和.

由(1.8), (1.7)式看出,矢量 \ddot{u}_i 与 \ddot{w}_i 并不耦合, F 也可分解为 F_r, F_z . 这样在每步时间积分之前可先求得集总质量解 $\ddot{U}^{(L)}$, 以 $\ddot{U}^{(L)}$ 为初值,即

$$\ddot{U}^{(0)} = \ddot{U}^{(L)} \quad (2.3)$$

并根据一致质量矩阵方程组的不同变形给出不同迭代过程.

(1) 简单迭代过程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_i^{(k+1)} &= 2 \ddot{u}_i^{(L)} - \sum_{j < i}^{(e)} \ddot{u}_j^{(k)} \\ \text{在} \\ \ddot{w}_i^{(k+1)} &= 2 \ddot{w}_i^{(L)} - \sum_{j > i}^{(e)} \ddot{w}_j^{(k)} \end{aligned} \right\} t +$$

(2.5)

(3) 松弛迭代过程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_i^{(k+1)} &= (1 - \alpha) \ddot{u}_i^{(k)} + \left[2 \ddot{u}_i^{(L)} - \sum_{j < i}^{(e)} \ddot{u}_j^{(k+1)} - \sum_{j > i}^{(e)} \ddot{u}_j^{(k)} \right] \\ \text{im e a} \\ \ddot{w}_i^{(k+1)} &= (1 - \alpha) \ddot{w}_i^{(k)} + \left[2 \ddot{w}_i^{(L)} - \sum_{j < i}^{(e)} \ddot{w}_j^{(k+1)} - \sum_{j > i}^{(e)} \ddot{w}_j^{(k)} \right] \end{aligned} \right\} \text{s pe}$$

i

)]

同样,由(2.2)式得到

$$(\dot{U}^{(k)}) \leq (\dot{U}^{(k-1)}) \tag{3.6}$$

在(3.3)及(3.6)式中等号并不成立,除非迭代过程使(3.2),(3.4)式取最大值的*i*相邻结点位移加速度误差相同,这一般是不可能的.这说明迭代的一致质量解,以 $\|\cdot\|$ 逼近精确解.

为了提高计算效率,根据 *M* 的对称正定性,可采用共轭斜量法.该方法二次收敛于精确解,是由 Hestenes 和 Steifel 提出的^[6].根据该方法,本文给出如下轴对称问题的迭代格式

$$\left. \begin{aligned} g_i^{(0)} &= 0.5 \left(F_{ir}^{(e)} - \sum_j m_{ij}^{(e)} \ddot{u}_j^{(L)} \right) \\ h_i^{(0)} &= 0.5 \left(F_{iz}^{(e)} - \sum_j m_{ij}^{(e)} \ddot{w}_j^{(L)} \right) \\ x_i^{(0)} &= g_i^{(0)}, \quad y_i^{(0)} = h_i^{(0)} \end{aligned} \right\} \tag{3.8}$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_i^{(k+1)} &= \ddot{u}_i^{(k)} + \frac{1}{1} x_i^{(k)} \\ \ddot{w}_i^{(k+1)} &= \ddot{w}_i^{(k)} + \frac{1}{1} y_i^{(k)} \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2^{(k)}}{2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (g_i^{(k+1)})^2}{\sum_{i=1}^n (g_i^{(k)})^2} \\ \frac{2^{(k)}}{2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (h_i^{(k+1)})^2}{\sum_{i=1}^n (h_i^{(k)})^2} \end{aligned} \right\} \tag{3.12}$$

及迭代判据

$$\frac{\dot{U}^{(k+1)} - \dot{U}^{(k)}}{\dot{U}^{(k)}} \leq \tag{3.13}$$

其中 ϵ 是根据精度要求定义的一个小数.

特别值得注意的是,一致质量迭代保留了现代冲击计算中“Element by Element”的重要特点.因此,为了提高计算效率,迭代过程可在局部区域内进行.例如,在穿、破甲分析中,考虑高速冲击变形的局部性,可局部使用迭代法.在 $r < r_0$ 区域内使用一致质量迭代解,而在区域 $r \geq r_0$ 内保留集总质量解.其中 r_0 可根据计算要求选择.

4 计算实例与实验对比

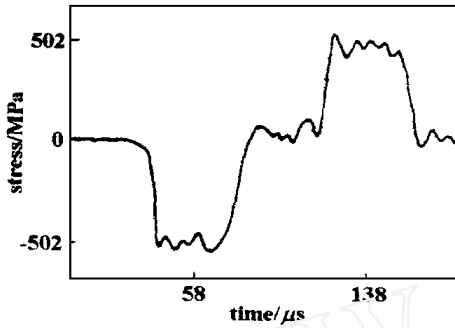


图2 弹性冲击实验结果
Fig.2 Experiment result of elastic impact

弹性冲击实验是在 SHPB 压杆装置上进行的. 选择直径 $p = 14.5$ mm, 长度为 $L_p = 100$ mm 的钢弹, 冲击直径 $o = 14.5$ mm, 长度为 $L_o = 400$ mm 的钢杆, 冲击速度为 $V_0 = 25.4$ m/s, 实验测得入射应力波及杆自由端面反射应力波示于图 2. 为了计算方便, 将冲击端部条件转换为压力 $P(t)$ ^[7]: 端部压力条件为 $P(t) = 502$ MPa ($0 \leq t \leq 39.4 \mu s$), 及 $P(t) = 0$ ($t > 39.4 \mu s$). 利用轴对称冲击有限元分别用一致质量迭代法及集总质量法进行计算, 结果示于图 3, 图 4. 由计算结果与实验结果比较看出, 一致质量迭代与实验较一致, 而集总质量法的结果误差较大, 特别是反射波已经失真.

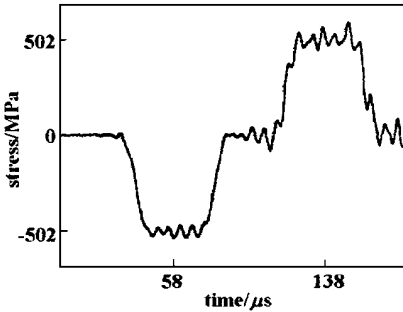


图3 一致质量迭代解
Fig.3 Iteration solution using consistent mass

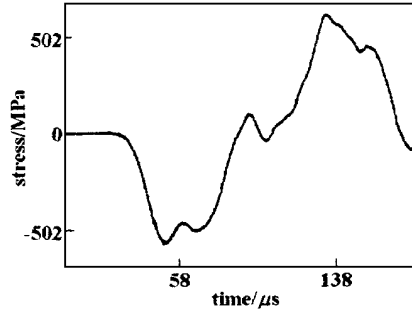


图4 集总质量解
Fig.4 Lumped mass solution

将一致质量迭代法引入具有侵蚀 (Erosion) 计算功能的程序, 对穿甲过程的分析 and 实验结果分别示于图 5 和图 6. 其中弹体材料为 93 钨合金, 弹体直径为 6 mm, 弹体长度为 $L = 93$ mm, 冲击速度为 $V_0 = 1339$ m/s. 靶板为 603 装甲钢 (厚度 $t_1 = 60$ mm) + 2 钢 (厚度 $t_2 = 20$ mm),

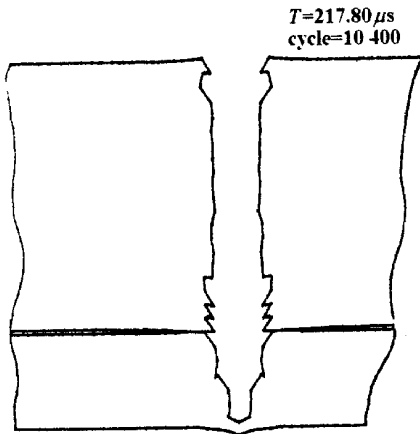


图5 一致质量迭代计算的侵蚀结果
Fig.5 Iterative penetration solution using consistent mass



图6 实验侵蚀结果
Fig.6 Experiment result of penetration

两板间隙为 1 mm. 从图 5 及图 6 比较看出,计算与实验结果有较好的吻合. 在计算中使用了局部区域迭代 ($r_0 = 4 r_p$, 其中 r_p 为弹体半径), 因此增加的计算量不大.

参 考 文 献

- 1 Belytschko T. Computational Methods in Mechanics, Amsterdam, North-Holland, 1987
- 2 Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1991
- 3 钱伟长. 应用数学和力学, 1982, 3(4) (Chien Weizang. Applied Mathematics and Mechanics, 1982, 3(4) (in Chinese))
- 3 Johnson GR. *Journal of Applied Mechanics*, 1976, 43(3)
- 5 宋顺成. 力学进展, 1994, 24(3) (Song Shuncheng. Advances in Mechanics, 1994, 24(3) (in Chinese))
- 6 Hestenes MR, Steifel E. Nat. Bur. Std. Report, 1952. (No 1659)
- 7 段祝平, 田兰桥等. 力学进展, 1980 (1) (Duan Zhuping, Tian Lanqiao et al. Advances in Mechanics, 1980 (1) (in Chinese))

ITERATIVE METHOD USING CONSISTENT MASS MATRIX IN AXISYMMETRICAL FINITE ELEMENTS FOR ANALYSIS OF HYPERVELOCITY IMPACT ¹⁾

Song Shuncheng

(Department of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
Inner Mongolia Institute fo Metals, Baotou 014034, China)

Abstract We present in this paper the iterative method using consistent mass matrix in axisymmetrical finite elements for analysis of hypervelocity impact. To retain the advantage of the integration on an element-by-element basis which is at the heart of the modern hydrocodes, we suggest the iterative process where the first step is to solve for accelerations at an advanced time step by using the lumped mass approach, then iterate using a consistent mass matrix to improve the estimate. Examples are given to show improved resolution with the new method.

Key words hypervelocity impact, dynamic finite element, mass matrix

¹⁾ The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 24 April 1996, revised 14 July 1997.