

直杆中应力波传播引起的分叉问题¹⁾

韩 强 武际可* 张善元 杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所, 太原 030024) * (北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 讨论轴向矩形脉冲载荷作用下有限长理想弹性直杆中应力波的传播及其反射引起的分叉问题, 讨论此类动力屈曲问题中横向惯性效应的影响; 理论分析始终遵循着这样的思路: 在分叉的那一瞬间, 杆并没有横向惯性效应. 目的是给出此类问题的一个合理提法, 从理论分析和数值计算中得到了许多重要的结论, 理论分析所遵循的思路和所采用的方法对各类结构由于应力波的传播及反射引起的分叉问题具有一定的意义.

关键词 应力波, 横向惯性效应, 分叉

引 言

各类轴向冲击载荷作用下直杆的弹、塑性动力屈曲问题的研究由来已久, 对这一问题的研究大都假设直杆具有某种形式的初缺陷, 在分析塑性屈曲时认为 Shanley 不卸载假定成立, 采用放大函数法讨论杆中的这些初缺陷在冲击载荷作用下被激发的行为, 然而这种方法有一定的缺点, 一方面它将分叉问题简单地等同于一个刚度问题或强度问题去处理, 虽然不失为一个工程上实用的方法, 但却掩盖了分叉问题的物理本质, 另一方面, 放大倍数不但具有很大的随意性, 而且人为给出的较大的放大倍数在分析塑性屈曲时, 是否会使 Shanley 不卸载假定不再成立, 也是一个值得认真对待的问题, 同时, 人们在分析动力屈曲问题时, 极少考虑波动效应, 近几年来, 国内一些学者在这方面做了一些有益的尝试^[1~6], 然而在这一问题的许多方面仍未能达成共识, 研究工作尚存在着以下一些不足:

- 1) 大都不考虑应力波效应, 采用初缺陷理论、放大函数法.
- 2) 大都仅涉及弹性波且不考虑应力波在边界处的反射.
- 3) 理论分析上, 都以半无限长杆为研究对象, 并且将波阵面视为固定端约束的情形.
- 4) 在对应力波引起的动力屈曲问题进行理论分析时, 是否应计及横向惯性效应, 人们尚未能达成共识.
- 5) 大都仅考虑应力纵波的影响, 未能计及动力屈曲问题中的弯曲波效应.

因此对这一问题仍需进行大量的工作, 特别是从理论和实验两个方面揭示波动效应和动力屈曲问题的内在联系. 针对以上几方面的不足, 本文讨论了有限长理想弹性直杆在轴向载荷作用下的动力屈曲问题, 分析了轴向应力波的传播和反射对屈曲的影响, 将屈曲问题归结为应力纵波的传播和反射导致的分叉问题, 从理论分析和数值计算中得到了许多重要的结论.

1) 国家自然科学基金资助项目.

1996-10-16 收到第一稿, 1997-12-01 收到修改稿.

1 杆中应力状态分析

图 1 所示为一长为 L 的理想弹性直杆，二端固支，在左端输入一矩形脉冲载荷如图 2 所示。

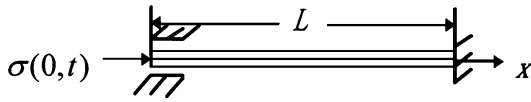


图 1 二端固支理想弹性直杆
Fig. 1 The ideal elastic column with two fixed ends

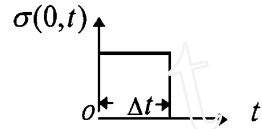


图 2 矩形脉冲载荷
Fig. 2 The rectangular pulse load

其中：

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} -N/A & (0 < t < t) \\ 0 & (t > t) \end{cases} \quad \text{同分析}$$

(2)

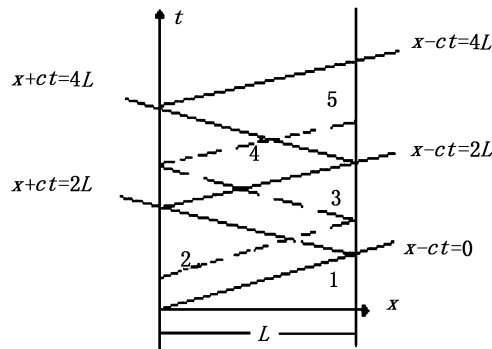


图 3 应力波在杆中的传播
Fig. 3 the propagation of stress wave in the column

2) $t < t - L/c$ 时, 应力波尚未反射

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} -N/A & (c(t - t) < x < ct) \\ 0 & (0 < x < c(t - t), ct < x < L) \end{cases}$$

$$(x, t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq c(t - t_0)) \\ -N/A & (c(t - t_0) < x \leq 2L - ct) \\ -2N/A & (2L - ct < x \leq L) \end{cases} \quad g$$

(5)

5) $L/c + t_0 < t < 2L/c$

$$(x, t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 2L - ct, 2L - c(t - t_0) \leq x \leq L) \\ -N/A & (2L - ct < x \leq 2L - c(t - t_0)) \end{cases}$$

(12)

$$\text{其中 } k_1 = \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{4 + 4^2}}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 + 4^2}}{2}}$$

2) 如 $\lambda < 0$, 取 $\lambda = -\alpha^2$ ($\alpha > 0$) 则有

$$T(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \quad (13)$$

$$W^{(4)} + \alpha^2 W^{(2)} + \alpha^2 W = 0 \quad (14)$$

其通解形如

$$W(x) = \begin{cases} A_1 \sin k_1 x + A_2 \cos k_1 x + A_3 \sin k_2 x + A_4 \cos k_2 x & (0 < x < L) \\ B_1 e^{k_3 x} \sin k_4 x + B_2 e^{k_3 x} \cos k_4 x + B_3 e^{-k_3 x} \sin k_4 x + B_4 e^{-k_3 x} \cos k_4 x & (L < x < 2L) \end{cases}$$

(16)

由 (12)

$$y(x, t) = \begin{cases} (A_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} + A_3 \sin \sqrt{\lambda} x + A_4 \cos \sqrt{\lambda} x) \sin \left[-t + \frac{x}{L} \right] & (ct < x < L) \\ (B_1 e^{k_1 x} + B_2 e^{-k_1 x} + B_3 \sin k_2 x + B_4 \cos k_2 x) \sin \left[-t + \frac{x}{L} \right] & (0 < x < ct) \end{cases}$$

式(21)给出了一个函数关系

$$f(\omega, L, \lambda^2, x_{cr}) = 0 \quad (22)$$

由此不难发现,当 $\lambda^2 > 0$ 时,方程(7)给出一振荡型周期解,它表征的是杆在轴向载荷作用下的横向振动而非屈曲,振动频率 ω 和载荷参量 λ^2 , 应力波传播距离 x_0 有关,当载荷达到某一临界值或应力波传播距离达到其临界长度时, $\omega = 0$, 这意味着杆横向振动的周期变成了无穷大,也即此时对应着分叉,或者说分叉条件是

$$\omega = 0 \quad (23)$$

将(23)式和(9)式比较,我们不难发现此时动力方程转化为静力方程的形式,因此,在讨论此类动力方程寻求分叉点问题时,不应计及横向惯性项,即可以通过静力形式的平衡方程非平凡解来讨论动力分叉问题,如果计及应力波的反射或涉及杆的弹塑性屈曲问题,仍然可以采用类似的方法.

3 分叉条件

从对横向惯性效应的讨论可以看出,对寻求分叉点的问题,可以通过静力平衡方程非平凡解的讨论来描述.为此,假定杆横向有一微小扰动,在不同的区域它应满足平衡方程. $0 \leq x \leq ct$ 时,应力波未反射,是应力波传播的第一个阶段,在此阶段内,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \quad (0 \leq x \leq ct) \\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= 0 \quad (ct < x \leq L) \end{aligned} \right\}$$

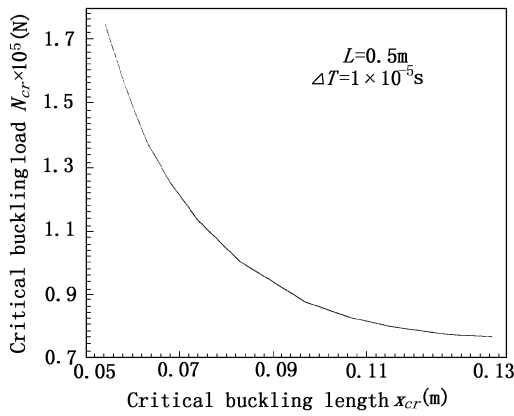
4 算例和结论

在上述关于分叉问题的讨论中,我们最感兴趣的是分叉点处各有关参量的相互关系,下面以一矩形截面铝合金杆为例进行了数值计算,横截面尺寸为 $25.0 \times 10.0(\text{mm}^2)$,弹性模量 $E = 6.98 \times 10^{10}(\text{N}/\text{m}^2)$,应力波波速 $c = 5.115 \times 10^3(\text{m}/\text{s})$.

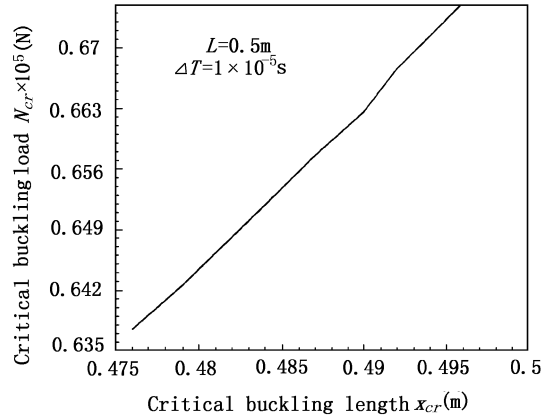
当分叉发生在应力波传播的第一阶段时,情形和阶跃载荷作用下应力波未反射时相同.图 6 即为其 $N_{cr}-x_{cr}$ 关系曲线.

根据上述矩形脉冲载荷作用下理想完善直杆中分叉问题的理论和数值分析,我们可以得出以下一些主要结论:

1) 随着应力波在杆中波及区域的不断增大,经历了一个由大变小的过程. > 0 时,对应着前屈曲运动; $= 0$ 时,对应着分叉.此时应力波波阵面传播到了杆的临界屈曲长度. < 0 时则对应着后分叉.



(a) 应力波反射前 $N_{cr}-x_{cr}$ 关系曲线(第二阶段)
(a) The $N_{cr}-x_{cr}$ curve before the reflection of stress wave (the second stage)



(b) 应力波反射后 $N_{cr}-x_{cr}$ 关系曲线(第三阶段)
(b) The $N_{cr}-x_{cr}$ curve after the reflection of stress wave (the third stage)

图 4 $N_{cr}-x_{cr}$ 关系曲线
Fig.4 The $N_{cr}-x_{cr}$ curves

2) 在有微小扰动的情况下,杆的前屈曲运动是一个轴向载荷作用下的横向振动,而并非一个简单的平凡解.分叉实际上是结构不能维持在平衡位置附近的微小横向振动而变成发散型运动的过程,这和我们的直观想象是相同的.

3) 分叉条件是 $\ddot{w} = 0$,不难发现此时动力方程转化为静力方程的形式,因此,在讨论此类动力方程寻求分叉点问题时,不应计及横向惯性项,即可以通过静力形式的平衡方程的非平凡解来讨论动力分叉问题.如果计及应力波的反射或涉及杆的弹塑性屈曲问题,仍然可以采用类似的方法.

4) 在分叉的那一瞬间,杆并没有横向惯性效应,但在进行后分叉分析时,横向惯性效应则是必须考虑的,这是因为结构分叉之后的变化过程仍为一瞬态过程,且在这一变形过程中横向

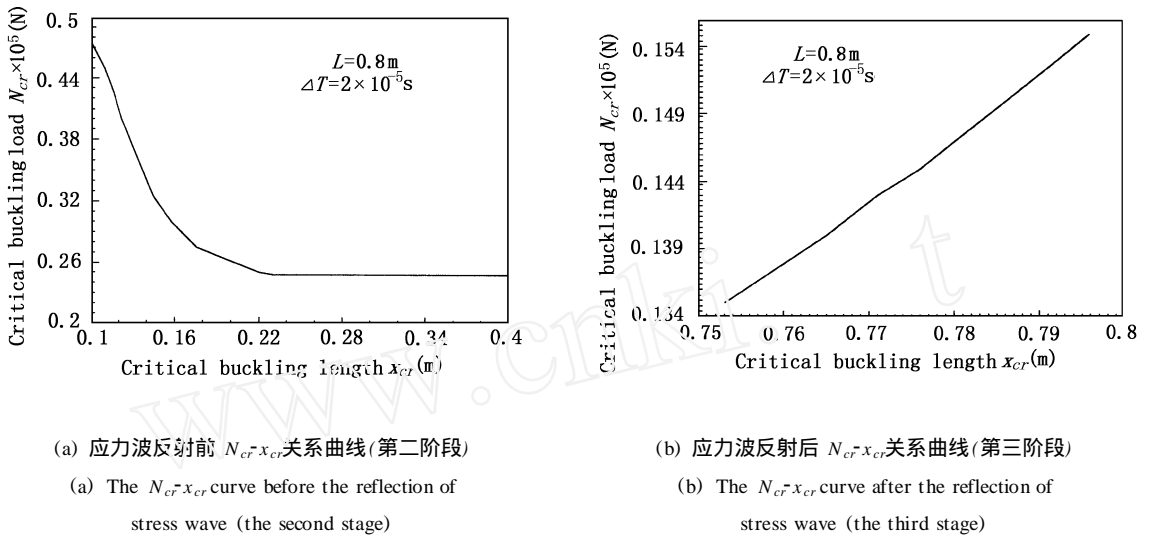


图 5 $N_{cr}-x_{cr}$ 关系曲线
Fig. 5 The $N_{cr}-x_{cr}$ curves

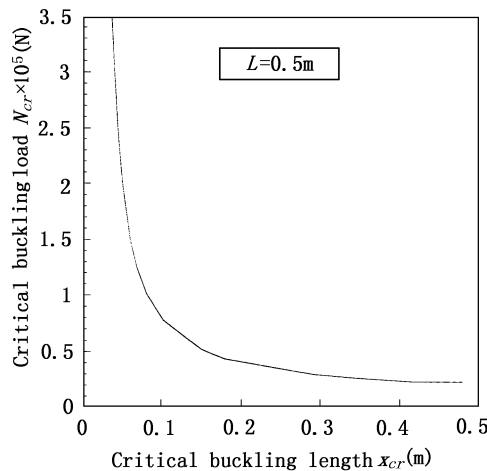


图 6 $N_{cr}-x_{cr}$ 关系曲线 (T)
Fig. 6 The $N_{cr}-x_{cr}$ curve (T)

变形是一主要变形. 在寻求分叉点时, 横向惯性不是一个是否可以忽略的问题, 而是一个是否应该计及的问题.

5) 虽然我们可以利用静力方程寻求分叉点, 但是杆的屈曲临界载荷却和通常的欧拉静力临界载荷值有很大差别, 即此时杆的临界屈曲载荷不仅与应力波传播的距离有关, 而且和杆长有关, 也就是说应力波未波及的区域对杆的屈曲也做出了贡献.

6) 当杆长 L 时, 阶跃载荷作用下杆的临界屈曲载荷也就相当于长为 ct 的杆的欧拉静力屈曲载荷, 此时, 在波阵面 $x = ct$ 处相当于固定端的情形. 而对有限长杆, 在波阵面 $x = ct$

处利用固定端的边界条件则显得缺乏足够的合理性.

7) 杆长 L 时相当于一个半无限长杆, 因此将有限长杆的实验结果和以半无限长杆为模型的理论分析结果进行对比必须十分小心, 这种比较只有当实验杆具有足够长度时才有意义.

8) 矩形脉冲应力波传播的前三个阶段对理想完善直杆的分叉起了至关重要的作用, 它们分别为: $0 < t < L/c$ 时, 此时应力波无反射; $t < L/c$ 时, 应力波仍未反射; $L/c < t < L/c + t/2$, 此时应力波在固定端已发生了第一次反射, 其中应力波传播的第一个阶段和阶跃载荷作用下应力波未反射时的情形相同. 若杆在这三个阶段不发生屈曲, 则它在应力波传播的其它阶段将不再屈曲.

9) 图 4~图 6 表明, 若要使杆在轴向应力波传播的初期发生屈曲需要较高的应力幅值(对同一长度的杆), 随着应力幅值的减小, 杆的临界屈曲长度或临界屈曲时间逐渐增大, 以至于只有当应力波在固定端发生反射之后杆才会发生屈曲, 此时, 随着应力幅值的减小, 杆的临界屈曲时间逐渐增大而杆的临界屈曲长度则逐渐减小.

10) 同一应力幅值作用下的杆, 杆越长也就越容易屈曲, 其临界屈曲时间就越短; 较短的杆屈曲时需要的应力水平较高, 对相同长度的杆, 在应力波幅值相同的情形下, 载荷持续时间越长临界屈曲时间越短, 若载荷持续时间相同, 则应力波幅值越高临界屈曲时间越短, 这和我们的直观想象是相同的.

11) 对某一长度的杆, 杆的临界屈曲长度(或临界屈曲时间)位于某一范围时, 它将对所加的应力幅值非常敏感, 应力幅值的任何微小变化都将导致杆的临界屈曲长度(或临界屈曲时间)产生一个巨大的差异, 由于动力屈曲实验大都以测量临界屈曲时间为主要目的, 因此这一特点将给实验研究带来极大的困难.

12) 若杆的屈曲发生在应力波传播的第二个阶段, 对二端固定的杆而言, 由于应力波的传播具有对称性, 其屈曲只可能发生在应力波传播到杆的中部之前; 若杆的屈曲发生在应力波传播的第三个阶段, 其屈曲只可能发生在应力波反射后传播到杆的中部之前, 当然, 对其它非对称边界条件的杆不再具有这一特点.

在结构的动力屈曲问题中考虑应力波效应是十分必要的, 也许只有这样才能更好地理解动力屈曲问题中所谓“动力”的含义, 本文在理想弹性直杆的动力屈曲问题中考虑了应力波效应的影响, 同时讨论了应力波反射引起的分叉问题, 对这一问题的许多方面提出了自己的看法, 理论分析所遵循的思路和所采用的方法对各类结构由于应力波的传播及反射引起的分叉问题具有一定的意义.

参 考 文 献

- 1 Wei Yong, Zhu Zhaoxiang, Li Yongchi. The study on the dynamic buckling of columns subjected to axial impact load. *Experimental Mechanics*, 1988, 3(3):258~263
- 2 Jie Min, Han Minbao, Wang Ren. Effect of flexural waves on the dynamic buckling of a long column under axial impact. *Proceedings of the Int. Symp. on Intense Dyna. Loading and Its Effect*, Chengdu, China, 1992
- 3 Teng Ningjun, Su Xian Yue. The bifurcation problem of the column with semi-infinite length under the axial impact load. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21(5):591~595
- 4 Ma Hongwei, Han Qiang, Zhang Shanyuan et al. The bifurcation problem of the elastic columns with finite length subjected to the axial impact load. *Explosion and Shock*, 1995, 15(4):300~306

- 5 Han Qiang, Ma Hongwei, Zhang Shanyuan, Yang Guitong. The dynamic buckling problem caused by propagation of stress wave in elastic cylindrical shells under impact torque. *Appl Math Mech*, 1996, 7(1):1~8
- 6 Xu Xingsheng, Su Xianyue, Wang Ren. The axial stress wave and the dynamic buckling of elastic-plastic cylindrical shells, *Chinese Science (A)*, 1995, 25(2):166~173

BIFURCATION CAUSED BY THE STRESS WAVE IN COLUMNS¹⁾

Han Qiang Wu Jike* Zhang Shanyuan Yang Guitong

(Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China)

* (Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract The elastic or plastic dynamic buckling of columns under different kinds of axial impact loading has been studied for a long time. When studying this problem, most researchers usually assume that the column has some imperfections and analyze the developing course of this imperfection under impact load by the amplification function method. Although the method is very practical in engineering, it has some defects. On the one hand, the bifurcation problem is analyzed like a strength or stiffness one, so its essential peculiarity is covered up, on the other hand, the amplification is given as one pleases, when the plastic buckling is concerned, and if the amplification is larger, we should pay attention to the fact whether Shanley's hypothesis is true or not.

A few reports on the dynamic buckling considering the effect of stress wave have been found, but the reflection of stress wave are not taken into consideration up to now.

In this paper, the bifurcation problem of an elastic column with finite length is studied. Its dynamic buckling under the rectangular load is reduced to a bifurcation problem caused by the propagation of axial stress wave. The critical buckling condition is given with reflection of the elastic stress wave being taken into account. The lateral inertia effect is discussed. The theoretical analysis shows that at the instant when the bifurcation occurs there is not any lateral inertia effect. Numerical computation and conclusions are presented.

Key words stress wave, lateral inertia effect, bifurcation

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 16 October 1996, revised 1 December 1997.