第 30 卷 第 4 期 力 学 学 报 Vol. 30, No. 4
1998 年 7 月 ACTA MECHANICA SINICA July, 1998

非 Четаев型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[1)]

梅凤翔 吴润衡 张永发
(北京理工大学应用力学系, 北京 100081)

摘要 研究非 Четаев型非完整系统的 Lie 对称性. 首先利用微分方程在无限小变换下的不变性建立 Lie 对称所满足的确定方程和限制方程, 给出结构方程并求出守恒量; 其次研究上述问题的逆问题: 根据已知积分求相应的 Lie 对称性; 最后举例说明结果的应用.

关键词 分析力学, 非完整系统, Lie 对称性, 守恒量

引 言

1957 年 B. C. Новоселов给出一个非 Четаев型非完整约束的例子, 其后研究了系统的运动微分方程[1]. B.B Румянцев指出, 如用无惯性随动系统代替则可实现[2]. 非 Четаев型非完整系统的主要特征是, 不能由非完整约束方程直接得到虚位移方程.

力学系统的守恒量或第一积分, 不仅具有数学重要性, 而且表现为深刻的物理规律. 寻求系统的守恒量有各种各样方法. 分析力学传统方法是从完整系统和非完整系统的运动微分方程出发直接导出广义能量积分, 循环积分等[3,4]. 寻求守恒量的近代方法是基于 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性质, 这就是 A. E. Noether 的理论贡献[5]. 1979 年 M. Lutzky 等重新把上世纪末数学家 S. Lie 研究微分方程不变性的扩展群方法引入力学领域加以研究, 提出了使运动微分方程不变的 Lie 对称性[6,7]. 从此 Lie 对称这一近代方法得以迅速发展. 文[7]研究了完整非保守系统的 Lie 对称, 文[8]研究了 Четаев型非完整系统的 Lie 对称. 本文进一步研究非 Четаев型非完整系统 Lie 对称性的两类问题: 由 Lie 对称找到守恒量; 由守恒量找到 Lie 对称. 因为 Четаев型非完整系统是非 Четаев型非完整系统的特殊情形, 因此本文第二部分推广了文[8]的结果.

1 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由几个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定, 系统的运动受有 g 个彼此独立的非 Четаев型非完整约束

$$F_\beta(t,q,\dot{q})=0 \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{1}$$

假设约束(1)加在虚位移上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n} f_{\beta s}(t,q,\dot{q})\,\delta q_s=0 \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{2}$$

1) 国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金资助课题.
1997-08-22 收到.

一般说来，$f_{\beta s}$ 与 $\partial F_\beta / \partial \dot{q}_s$ 无关. 特别地，当取

$$f_{\beta s} = \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

时，则为 Четаев型非完整约束. 由 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(2)，利用 Lagrange 乘子法，可得到系统的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta f_{\beta s} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

其中 L 为系统动势，Q_s 为非势广义力，λ_β 为约束乘子. 在运动微分方程积分之前，由约束方程(1)和运动方程(3)可求出 λ_β 为 $t, q, \dot{q}$ 的函数，于是方程(3)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, q, \dot{q}) = \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta f_{\beta s} \tag{5}$$

假设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)$$ 的特 0　　因此

则由方程(4)可解得所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s = g_s(t, q, \dot{q}) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

称方程(6)为与非完整系统(1)，(3)相应的完整系统的运动方程. 如果运动初始条件满足约束方程(1)，则系统(6)的解便给出非完整系统的运动.

2　Lie 对称正问题

2.1　无限小变换和 Lie 对称

取无限小变换为

$$t^* = t + \Delta t, \quad q_s^* = q_s + \Delta q_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

或

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, q, \dot{q}), \quad q_s^* = q_s + \varepsilon \xi_s(t, q, \dot{q}) \tag{8}$$

取无限小变换生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{9}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n} (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{10}$$

则方程(6)在无限小变换(8)下的不变性归为如下确定方程[7]

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 g_s = X^{(1)}(g_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{11}$$

非完整约束(1)在变换(8)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(F_\beta(t, q, \dot{q})) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{12}$$

定义 1　如果无限小变换生成元 ξ_0，ξ_s 满足确定方程(11)和限制方程(12)，则称变换是非

Четаев型非完整系统的 Lie 对称变换.

定义 2 如果无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(11), 则称变换是相应完整系统的 Lie 对称变换.

2.2 结构方程和守恒量

命题 对于满足确定方程(11)和限制方程(12)的无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在满足方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{P} = 0 \tag{13}$$

的函数 $P = P(t, q, \dot{q})$, 则非 Четаев型非完整系统存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + P = \text{const} \tag{14}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = &\dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \\ &\sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) - L\dot{\xi}_0 - X^{(1)}(L) - \\ &\sum_{s=1}^{n}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = \\ &\sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - \Lambda_s\right) = 0\end{aligned}$$

(

称方程(13)为 Lie 对称的结构方程, 称函数 $P(t, q, \dot{q})$ 为规范函数.

如果约束(1)是 Четаев型的, 则命题成为文[8]的结果; 如果没有非完整约束, 则命题给出文[7]的结果.

2.3 Lie 对称正问题的解法

首先, 对已知系统建立确定方程(11)和限制方程(12), 由方程(11)和(12)求出 Lie 对称变换生成元 ξ_0, ξ_s; 其次, 将所得 ξ_0, ξ_s 代入结构方程(13)求出 $\dot{P}$, 如果 $\dot{P}$ 为零或为某函数的全导数, 则可找到规范函数 P; 最后, 将所得 ξ_0, ξ_s, P 代入式(14), 便可求出 Lie 对称守恒量. 以上问题称为 Lie 对称正问题.

3 Lie 对称逆问题

3.1 由已知积分求相应的 Noether 对称

对非 Четаев型非完整系统的 Noether 对称, 有[9]

$$\sum_{s=1}^{n} f_{\beta s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0 + \\ &\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{P} = 0\end{aligned} \tag{16}$$

假设系统有积分

$$I = I(t, q, \dot{q}) \tag{17}$$

将其对 t 求导数, 得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{18}$$

将方程(3)两端乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{19}$$

并对 s 求和, 得到

$$\sum_{s=1}^{n}\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta f_{\beta s}\right) = 0 \tag{20}$$

将式(18), 式(20)相加, 分出含 $\ddot{q}_k$ 的项, 其系数应为零, 则有

$$-\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\bar{\xi}_s = 0 \tag{21}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_s = \sum_{k=1}^{n}\tilde{\omega}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{22}$$

其中

$$\tilde{\omega}_{sk}\omega_{kr} = \delta_{sr}, \quad \omega_{kr} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_r} \tag{23}$$

令积分(14)等于积分(17), 即

$$L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\bar{\xi}_s\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + P = I \tag{24}$$

这样, 由式(22)、式(24)在给定 P 下可求出无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s, 它们对应与非 Четаев型非完整系统相应的完整系统的 Noether 对称. 如果 ξ_0, ξ_s 还满足限制条件(15), 则对应的变换是非 Четаев型非完整系统的 Noether 对称变换.

3.2　由 Noether 对称性求 Lie 对称性

将上面求得的 Noether 对称生成元 ξ_0, ξ_s 代入 Lie 对称的确定方程(11)和限制方程(12), 如果它们满足, 则变换是非完整系统的 Lie 对称变换; 如果仅满足确定方程(11), 则变换是相应完整系统的 Lie 对称变换.

3.3　Lie 对称逆问题的解法

首先, 由已知积分(17)按式(22), 式(24)求出相应的 Noether 对称; 其次, 由 Noether 对称通过验证方程(11), 方程(12)来求得 Lie 对称. 这就是非 Четаев型非完整系统 Lie 对称逆问题.

力学系统的运动微分方程可以有许多 Lie 对称性, 但是每个 Lie 对称不一定有相应的守恒量; 反之, 系统的守恒量也不一定有相应的 Lie 对称. 因此, 由已知守恒量找出相应的 Lie 对称这类逆问题不一定有解, 即使有解也不一定能找出所有的 Lie 对称.

4　算　例

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \tag{25}$$

所受非完整约束为

$$F = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0 \tag{26}$$

假设约束(26)是非 Четаев型的，虚位移方程为

$$\delta q_1 - \delta q_2 = 0 \tag{27}$$

试研究系统的 Lie 对称与守恒量.

首先，研究 Lie 对称正问题. 方程(3)给出

$$\ddot{q}_1 = \lambda, \quad \ddot{q}_2 + 1 = -\lambda \tag{28}$$

由方程(26)，方程(28)解得约束乘子

$$\lambda = -\frac{\dot{q}_1 + 1}{t + 1} \tag{29}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= g_1 = -\frac{\dot{q}_1 + 1}{t + 1} \\ \ddot{q}_2 &= g_2 = \frac{\dot{q}_1 - t}{t + 1} \\ \Lambda_1 &= -\Lambda_2 = g_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\tag{31}$$

限制方程(12)给出

$$X^{(1)}(\dot{q}_2 - t\dot{q}_1) = \xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 - t(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) = 0 \tag{32}$$

由方程(31)，方程(32)可求得如下解

$$\xi_0 = 0, \ \xi_1 = 1, \ \xi_2 = 0 \tag{33}$$

$$\xi_0 = 0, \ \xi_1 = 0, \ \xi_2 = 1 \tag{34}$$

$$\xi_0 = 0, \ \xi_1 = \xi_2 = 1 \tag{35}$$

$$\xi_0 = 0, \ \xi_1 = \ln(1 + t), \xi_2 = t - \ln(1 + t) \tag{36}$$

对于生成元(35)，由结构方程(13)求得

$$\dot{P} = 1$$

于是得规范函数

$$P = t \tag{37}$$

守恒量(14)给出

$$I = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = \mathrm{const} \tag{38}$$

对于生成元(33)，(34)，(36)找不到相应的规范函数 P，即这些 Lie 对称没有相应的守恒量.

其次，研究 Lie 对称逆问题. 假设已知系统有积分

$$I = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = \mathrm{const} \tag{39}$$

来求与之相应的 Lie 对称. 方程(22)，方程(24)给出

$$\bar{\xi}_1 = 1, \qquad \bar{\xi}_2 = 1$$

$$L\xi_0 + \dot{q}_1\bar{\xi}_1 + \dot{q}_2\bar{\xi}_2 + P = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t \tag{40}$$

由此解得

$$\xi_0 = \frac{t - P}{L}, \qquad \xi_1 = 1 + \dot{q}_1\xi_0, \qquad \xi_2 = 1 + \dot{q}_2\xi_0 \tag{41}$$

容易验证, 不论 P 取何值, 生成元(41)都满足限制条件(15). 因此, 由生成元(41)生成的无限小变换是非 Четаев型非完整系统的 Noether 对称变换. 将所得生成元(41)代入确定方程(11), 容易验证, 不论 P 取何值, 都是成立的. 将式(41)代入限制方程(12), 有

$$X^{(1)}(F) = \xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 - t(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) = (\ddot{q}_2 - t\ddot{q}_1)\xi_0 = \dot{q}_1\xi_0 \tag{42}$$

显然, 仅当

$$\xi_0 = 0 \tag{43}$$

时, 才有

$$X^{(1)}(F) = 0 \tag{44}$$

因此, 生成元和规范函数取为

$$\xi_0 = 0, \qquad \xi_1 = \xi_2 = 1, \qquad P = t \tag{45}$$

才是非完整系统的 Lie 对称变换. 如果 P 取其它值, 则所得变换仅是相应完整系统的 Lie 对称变换.

参 考 文 献

1 Новоселов ВС Уравнения ДвиТения нелинеиных Неголономных систем со связями, не относящимися к типу НГ четаева *Вестн ЛГУ*,1960 ,280 :53～67

2 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京: 北京工业学院出版社, 1987 (Mei Fengxiang. Research on Nonholonomic Dynamics. Beijing:BIT Press, 1987 (in Chinese))

3 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985 (Mei Fengxiang. Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems. Beijing:BIT Press, 1985, (in Chinese))

4 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987 (Chen Bin. Analytical Dynamics. Beijing: Peking University Press, 1987 (in Chinese))

5 Noether AE. Invariante Variationsprobleme. Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys, 1918, KI, Ⅱ:235～257.

6 Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979 ,12(7) :973～981

7 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量. 力学进展, 1993, 23(3): 360～372 (Zhao Yueyu, Mei Fengxiang. On symmetry and invariant of dynamical systems. *Advances in Mechanics*, 1993, 23(3) :360～372 (in Chinese))

8 Wu Runheng, Mei Fengxiang. On the Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems. *J. of BIT*, 1997 ,6(3) :229～235.

9 苏正雷, 罗绍凯. 高阶非 Четаев型约束系统的广义守恒律. 河南科学, 1993, 11(2-3): 137～142 (Su Zhenglei, Luo Shaokai. Generalized conservation laws of systems with higher order constraints of non-Chetaev's type. *Henan Science*. 1993, 11(2-3): 137～142 (in Chinese))

LIE SYMMETRIES AND CONSERVED QUANTITIES OF NONHOLONOMIC SYSTEMS OF NON-CHETAEV'S TYPE [1)]

Mei Fengxiang Wu Runheng Zhang Yongfa
(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, *China)*

Abstract There are two kinds of modern methods in finding conservation laws. One is the Noether method which is based on the invariance of the Hamilton's action under the infinitesimal transformations, the other one is the Lie method which is based on the invariance of the differential equations under infinitesimal transformations. In mathematics, the symmetry methods in the theory of differential equations have made great progress in recent years. In mechanics, the research on Lie symmetries and conservation laws of holonomic conservative systems just began in seventies. This paper involves Lie symmetries and conservation laws of nonholonomic sysems of non-Chetaev's type. We studied two kinds of problems on Lie symmetries and conserved quantities. One is the direct problem of Lie symmetries:finding out the corresponding conserved quantity according to a given Lie symmetry. For this, the equations of motion of the systems must be established, then establishing the determining equations of Lie symmetries according to the Lie theory that making the differential equations invariant under infinitesimal transformations, then finding out Lie symmetries of the holonomic systems corresponding to the nonholonomic systems by solving the determining equations. In order to obtain Lie symmetries of the nonholonomic systems, it is necessary to make the equations of nonholonomic constraints invariant under infinitesimal transformations. And this is just the restriction equations. Lie symmetries may not bring about conservation laws. The proposition in this paper shows that, if the structure equation have solution with respect to Lie symmetries, then the conservation laws can be found. The another kinds of problem is called the inverse problem of Lie symmetries: find out the corresponding Lie symmetry according to a known conserved quantity. For this, Noether symmetry corresponding to the given conserved quantity need to be found by Noether theory, then examining the symmetry if it is or not Lie symmetry according to the determining equations and restriction equations. Since Chetaev's nonholonomic systems is a special case of the non-Chetaev's type, the results in this paper have more universality.

Key words analytical mechanics, nonholonomic symstem, Lie symetry, conserved quantity

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China.
Received 22 August 1997.