第 30 卷 第 5 期
1998 年 9 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 30, No. 5
Sept., 1998

# 一阶非线性项、四阶色散项的 Boussinesq 类方程

林建国 邱大洪
(大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室, 大连 116024)

**摘要** 推导了由一阶色散项 $O(\beta^2)$ 表示的 Boussinesq 类方程, 方程中保留了一阶非线性项 $O(\alpha)$ 及四阶色散项 $O(\beta^8)$, 其中 $\alpha = A/h_0$, $\beta = h_0/L$, $A$ 为特征波高, $L$ 为特征波长, $h_0$ 为特征水深. 从理论上证明了 Boussinesq 改善型方程对色散性精度的提高, 阐明了此类方程对色散项所保留的精度为 $O(\beta^8)$, 而并非是此类方程推导之初的假设为 $O(\beta^2)$. 这一点, 将改变人们传统的认识.

**关键词** 一阶非线性项, 四阶色散项, Boussinesq 类方程

## 前 言

传统 Boussinesq 方程由于其方程形式简单, 且包含了非线性及色散性的影响而被广泛地应用于波浪研究之中[1], 用该方程解决问题的最大好处在于可以将三维问题转换为二维问题求解, 降低了求解难度. 但该方程仅包含了一阶非线性项 $O(\alpha)$ 及一阶色散项 $O(\beta^2)$, 这也就限制了该方程进一步向更广泛的范围应用. 突出的问题是对水深的限制较严格, 欲使波浪相速度误差小于 5 %, 则要求水深不能大于波长的 1/5 (McCowman, 1987)[2], 这与工程实际中有航道港口水域和不规则波情况是不适应的. 为克服这一不足, 近十几年来, 人们在改善 Boussinesq 方程的一维线性色散关系做了许多工作, Witting[3] (1984), Madsen et al.[4,5] (1991, 1992), Nwogu[6] (1993) 等使方程线性色散关系的精度达到 $O(\beta^4)$, Schaffer et al.[7] (1995), 张永刚[8] (1996), 林建国等[9] (1996) 使方程的线性色散关系的精度均达到 $O(\beta^8)$. 这些工作均是在仅保留 $O(\alpha, \beta^2)$ 项的方程中加入包含待定常数且与 $O(\beta^4)$ 同阶的项, 通过与线性、任意水深的精确 Airy 波一维色散关系的比较, 确定待定常数. 但如此得到的方程并不能证明其色散项的量阶高于 $O(\beta^2)$, 人们普遍认为此类 Boussinesq 改善型方程的量阶仍是一阶非线性项与一阶色散项的[7,9], 只是其一维线性色散关系的精度得到相应的提高. 最近, 邹志利[10] (1996), 林建国与邱大洪[11] (1996) 分别得到了保留至二阶非线性项 $O(\alpha^2, \alpha\beta^2)$ 及二阶色散项 $O(\beta^4)$ 的方程.

本文仍从经过适当的无量纲变换所得到的欧拉方程出发, 忽略 $O(\alpha\beta^2)$ 及其以上高阶非线性项, 没有无旋假定, 经严格的数学推导, 得到了在常水深情况下, 保留一阶非线性项 $O(\alpha)$, 四阶色散项 $O(\beta^8)$ 的 Boussinesq 类方程. 进一步通过速度变换, 使方程的色散项均由与 $O(\beta^2)$ 同阶的项表示, 这使得本文保留一阶非线性项 $O(\alpha)$, 四阶色散项 $O(\beta^8)$ 的方程形式与文献[7, 9] 的 Boussinesq 改善型方程形式一致. 由此, 从理论上证明了 Boussinesq 改善型方程[7,9] 对色散性

1996 - 09 - 09 收到第一稿, 1998 - 01 - 16 收到修改稿.

精度的提高,阐明了此类方程对色散项所保留的精度为 $O(\beta^3)$,而并非是此类方程推导之初的假设为 $O(\beta^2)$,这一点,将改变人们传统的认识.

## 1　方程推导

### 1.1　方程无量纲化

首先定义如下的小参数

$$\alpha = A/h_0, \quad \beta = h_0/L \tag{1}$$

其中,$A$,$L$,$h_0$ 分别是波幅,波长及水深的特征长度.将问题进行如下的无量纲变换

nc st]

$$\left.\begin{aligned}
&(x', y') = L(x, y), \quad \zeta' = A\zeta, \quad h' = h_0 h, \quad t' = (L/\sqrt{gh_0})\,t \\
&z = (z' - \zeta')/H', \quad H' = \zeta' + h', \quad H = \alpha\zeta + h \\
&U' = \alpha\sqrt{gh_0}\,U, \quad W' = \alpha\sqrt{gh_0}\,W/\beta \\
&p' = \alpha\rho g h_0 p, \quad p_1' = \alpha\rho g h_0 p_1, \quad \alpha p_1 = \alpha p + \alpha\zeta + (h + \alpha\zeta)\,z
\end{aligned}\right\}$$

1速度

### 1.2 保留至四阶色散项的水深平均速度方程

忽略 $O(\alpha\beta^2)$ 及其以上高阶非线性项,保留色散项至 $O(\beta^8)$,则由文献[1,11]可知,速度 $\mathrm{U}(x, y, z, t)$ 可以表示为

$$\mathrm{U}(x,y,z,t) = \overline{\mathrm{U}}(x,y,t) + \sum_{i=1}^{4}\beta^{2i}\mathrm{U}_i(x,y,z,t) + O(\alpha\beta^2, \beta^{10}) \tag{10}$$

(10) 并不是 $\mathrm{U}(x, y, z, t)$ 对 $\beta^2$ 的展开式,因为 $\overline{\mathrm{U}}$ 也是 $\beta^2$ 的函数. 上式从 0 至 - 1 对 $z$ 积分,可得

$$\sum_{i=1}^{4}\beta^{2i}\int_{-1}^{0}\mathrm{U}_i \mathrm{d}z = 0 \tag{11}$$

将(9), (10) 代入 (8), 考虑平底的情况,即 $h = 1$ (为方便还原到有量纲方程,本文仍保留 $h$ 的写法),可得

$$W = \sum_{i=1}^{4}\beta^{2i}W_i \tag{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= -(1+z)h\nabla\cdot\mathrm{U} \\ W_i &= -h\nabla\cdot\int_0^z \mathrm{U}_{i-1}\mathrm{d}z \quad (i = 2,3,4)\end{aligned}\right\}$$

(19)

其中

$$\mathrm{f}_1 = h^2 \nabla\nabla \cdot \mathrm{U}_{,t}, \quad \mathrm{f}_i = h^2 \nabla\nabla \cdot \mathrm{f}_{j-1} \quad (i = 2,3,4) \tag{20}$$

(19)代入(17) ,可得

$$\bar{\mathrm{U}}_{,t} + \alpha(\bar{\mathrm{U}} \cdot \nabla)\bar{\mathrm{U}} + \nabla(p_s + \zeta) = \beta^2 \mathrm{f}_1/3 + \beta^4 \mathrm{f}_2/45 + 2\beta^6 \mathrm{f}_3/945 + \beta^8 \mathrm{f}_4/4725 \tag{21}$$

(9) , (21)便是在常水深的情况下,由水深平均速度表达的保留一阶非线性项、四阶色散项的 Boussinesq 类方程. 在(21)中,忽略 $O(\beta^4)$及其以上的高阶色散项,便是仅保留一阶非线性项、一阶色散项并考虑了自由表面压力的传统 Boussinesq 方程.

由(19) , (18) , (13) , (14)可知,色散项保留至四阶时,水平速度与压力在水深方向对 $z$ 的展开是八次方,垂向速度是七次方,这对深水域实际流场的速度、压力分布可以更充分、准确地进行描述,故更具有实际的工程应用价值.

(21)中的 $\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4$ 分别包含了水深平均速度对空间的四、六、八阶导数项,这为求解带来了很大的困难. 下面,我们将通过对水深平均速度的变换,使整个方程中的导数不超过四阶.

## 1.3 由变换速度表示的方程

由(21)可得

$$\beta^2 \mathrm{f}_1 = \{A - (\beta^4 \mathrm{f}_2/45 + 2\beta^6 \mathrm{f}_3/945 + \beta^8 \mathrm{f}_4/4725)\} \times 3 \tag{22}$$

$$\beta^6 \mathrm{f}_3 = \{A - (\beta^2 \mathrm{f}_1/3 + \beta^4 \mathrm{f}_2/45 + \beta^8 \mathrm{f}_4/4725)\} \times 945/2 \tag{23}$$

其中

$$A = \bar{\mathrm{U}}_{,t} + \alpha(\bar{\mathrm{U}} \cdot \nabla)\bar{\mathrm{U}} + \nabla(p_s + \zeta) \tag{24}$$

将(22) , (23)分别代入(21)中的 $f_4$,并考虑到(20) , (24) ,可得

$$A - \beta^2 \mathrm{f}_1/3 - \beta^4 \mathrm{f}_2/45 - 13\beta^6 \mathrm{f}_3/4725 - \beta^6 \mathrm{R}_3/1575 = 0 \tag{25}$$

$$A - 13\beta^2 \mathrm{f}_1/30 + \beta^4 \mathrm{f}_2/90 + \beta^6 \mathrm{f}_3/9450 - \beta^2 \mathrm{R}_1/10 = 0 \tag{26}$$

其中

$$\mathrm{R}_1 = h^2 \nabla\nabla \cdot \nabla(p_s + \zeta), \quad \mathrm{R}_i = h^2 \nabla\nabla \cdot \mathrm{R}_{i-1} \quad (i = 2,3,4) \tag{27}$$

引入变换速度 $\check{\mathrm{U}}$,与水深平均速度 $\bar{\mathrm{U}}$ 之间的关系为

$$\bar{\mathrm{U}}_{,t} = \check{\mathrm{U}}_{,t} + a_1\beta^2 \check{\mathrm{f}}_1 + a_2\beta^2 \mathrm{D}_1 \tag{28}$$

其中, $a_1$, $a_2$ 为待定常数,上方带弧形的变量与变换速度相联,各自的定义与(20) , (24)类似, 为

$$\left.\begin{aligned} &\check{\mathrm{f}}_1 = h^2 \nabla\nabla \cdot \check{\mathrm{U}}_{,t}, \quad \check{\mathrm{f}}_i = h^2 \nabla\nabla \cdot \check{\mathrm{f}}_{i-1} \quad (i = 2,3,4) \\ &\check{A} = \check{\mathrm{U}}_{,t} + \alpha(\check{\mathrm{U}} \cdot \nabla)\check{\mathrm{U}} + \nabla(p_s + \zeta) \end{aligned}\right\}$$

由(28)，(20)，(24)，可得

$$\mathrm{f}_i = \check{\mathrm{f}}_i + a_1\beta^2 \check{\mathrm{f}}_{i+1} + a_2\beta^2 \mathrm{D}_{i+1} \quad (i = 1,2,3) \tag{31}$$

$$\mathrm{A} = \check{\mathrm{A}} + a_1\beta^2 \check{\mathrm{f}}_1 + a_2\beta^2 \mathrm{D}_1 \tag{32}$$

将(28)代入(9)，可得

$$\zeta_{,t} + h\nabla\cdot\check{\mathrm{U}} + h\beta^2\nabla^2\left( a_1 h^2\nabla\cdot\check{\mathrm{U}} + a_2 h\zeta_{,t}\right. + \alpha\nabla\cdot(\zeta\check{\mathrm{U}}) = 0 \tag{33}$$

由(30)，(33)可得

$$\mathrm{D}_i = -\left( \check{\mathrm{f}}_i + (a_1\check{\mathrm{f}}_{i+1} + a_2\mathrm{D}_{i+1})\beta^2\right. + O(\alpha) \quad (i = 1,2,3) \tag{34}$$

将(31)，(32)，(34)代入(25)可得

$$\check{\mathrm{A}} + d_{14}\beta^2\check{\mathrm{f}}_1 + d_{13}\beta^4\check{\mathrm{f}}_2 + d_{12}\beta^6\check{\mathrm{f}}_3 + d_{11}\beta^8\check{\mathrm{f}}_4 - \beta^6\mathrm{R}_3/1575 = 0 \tag{35}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
d_{11} &= a_2^4 + (1/3 - a_1)a_2^3 - (a_1/3 + 1/45)a_2^2 + (13/4725 + a_1/45)a_2 - 13a_1/4725 \\
d_{12} &= a_2^3 - (1/3 - a_1)a_2^2 + (1/45 + a_1/3)a_2 - 13/4725 - a_1/45 \\
d_{13} &= a_2^2 + (1/3 - a_1)a_2 - 1/45 - a_1/3, \quad d_{14} = a_1 - a_2 - 1/3
\end{aligned}\right\}$$

(38)

由(35)，(37)消掉 $\check{\mathrm{f}}_4$，可得

$$d_{34}\check{\mathrm{A}} + d_{33}\beta^2\check{\mathrm{f}}_1 + d_{32}\beta^4\check{\mathrm{f}}_2 + d_{31}\beta^6\check{\mathrm{f}}_3 + d_{21}\beta^6\mathrm{R}_3/1575 - d_{11}\beta^2\mathrm{R}_1/10 = 0 \tag{39}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
d_{31} &= d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}, \quad d_{32} = d_{11}d_{23} - d_{21}d_{13} \\
d_{33} &= d_{11}d_{24} - d_{21}d_{14}, \quad d_{34} = d_{11} - d_{21}
\end{aligned}\right\}$$

将(31)，(32)，(34)代入(21)，可得

$$\check{A} + d_{53}\beta^2 \check{f}_1 + d_{52}\beta^4 \check{f}_2 + d_{51}\beta^6 \check{f}_3 + O(\beta^8) = 0 \tag{43}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} d_{51} &= a_2^3 + (a_1 - 1/3)a_2^2 + (a_1/3 + 1/45)a_2 - a_1/45 - 2/945 \\ d_{52} &= a_2^2 + (1/3 - a_1)a_2 - a_1/3 - 1/45, \quad d_{53} = a_1 - a_2 - 1/3 \end{aligned}\right\}$$

(47)

由(39)，(46)消掉 $R_3$，可得

$$\check{A} = d_{73}\beta^2 \check{f}_1 + d_{72}\beta^4 \check{f}_2 + d_{71}\beta^6 \check{f}_3 + d_{74}\beta^2 R_1 \tag{48}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} d_{71} &= (d_{21}d_{52} - d_{51}d_{22})/d_{51}, \quad d_{72} = (d_{53}d_{21} - d_{51}d_{23})/d_{51} \\ d_{73} &= (d_{21} - d_{51}d_{24})/d_{51}, \quad d_{74} = (d_{21} + d_{51}/10)/d_{51} \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{ 105a_1^2 + 16a_1 + 2/3 \quad a_2 - 9a_1^2 - 2a_1/3 + 1/45 = 0 \right. \tag{54}$$

(53),(54) 有如下的解

$$(a_1, a_2) = \begin{cases} -1/18 + \sqrt{805}/630, & -2/9 + \sqrt{133}/63 \\ -1/18 + \sqrt{805}/630, & -2/9 - \sqrt{133}/63 \\ -1/18 - \sqrt{805}/630, & -2/9 + \sqrt{133}/63 \\ -1/18 - \sqrt{805}/630, & -2/9 - \sqrt{133}/63 \end{cases} \tag{55}$$

将 (55) 代入 (38),(44) 及 (49),与 (55) 对应可得

$$(d_{74}, d_{73}) = \begin{cases} 1/18 + \sqrt{805}/630, & 2/9 + \sqrt{133}/63 \\ 1/18 + \sqrt{805}/630, & 2/9 - \sqrt{133}/63 \\ 1/18 - \sqrt{805}/630, & 2/9 + \sqrt{133}/63 \\ 1/18 - \sqrt{805}/630, & 2/9 - \sqrt{133}/63 \end{cases} \tag{56}$$

至此,我们得到了色散项完全由与 $O(\beta^2)$ 同阶项表示的保留一阶非线性项、四阶色散项的 Boussinesq 类方程 (33),(52),其中的常数由 (55),(56) 给出.

## 2　方程的比较

### 2.1　与 Airy 波一维线性色散关系的比较

不难得到 (33),(52) 对应的一维线性色散关系为

$$c^2/gh = \frac{1 + (d_{74} - a_1)h^2k^2 - a_1 d_{74} h^4 k^4}{1 + (d_{73} - a_2)h^2k^2 - a_2 d_{73} h^4 k^4} \tag{57}$$

而精确的 Airy 波的一维线性色散关系为

$$\frac{(c^{\mathrm{Airy}})^2}{gh} = \frac{\tanh(kh)}{kh} = \frac{1 + \frac{1}{9}k^2h^2 + \frac{1}{945}k^4h^4}{1 + \frac{4}{9}k^2h^2 + \frac{1}{63}k^4h^4} + O(k^{10}h^{10}) \tag{58}$$

将 (55),(56) 代入 (57) 便可以得到与 (58) 的展开式一致的结果. 因为 (33),(52) 所保留的色散项精度为四阶,故其与精确的 Airy 波一维线性色散关系必然保持四阶相同.

### 2.2　与 Boussinesq 改善型方程的比较

对于常水深的情况,文献[7,9]所得到的 Boussinesq 改善型方程的形式与本文的保留一阶非线性项、四阶色散项的 Boussinesq 类方程 (33),(52) 一致. 这说明文献[7,9]所得到的 Boussinesq 改善型方程对色散项的保留也是四阶,即所忽略掉的是 $O(\beta^{10})$,类似地,文献[3,4,5,6]对色散项的保留是二阶的,即所忽略掉的是 $O(\beta^6)$. 但由于这一类 Boussinesq 改善型方程均是在仅保留 $O(\alpha,\beta^2)$ 项的方程中加入包含待定常数且与 $O(\beta^4)$ 同阶的项,通过与线性、任意水深的精确 Airy 波一维色散关系的比较,确定待定常数,因此,其推导方法本身不能证明所保留的色散项量阶高于 $O(\beta^2)$,在这些文献中均写明了所忽略的色散项量阶为 $O(\beta^4)$ 及其高阶项,由本文上述表明,这些认识是不正确的.

## 3 结束语

在常水深的情况下,经严格的数学推导,得到了保留一阶非线性项 $O(\alpha)$、四阶色散项 $O(\beta^3)$ 的 *Boussinesq* 类方程,其中的色散项均由与 $O(\beta^2)$ 同阶的项表示. 尽管方程保留的色散项阶数很高,但方程的形式却很简单,最高导数为三阶.

方程形式与[7,9]的 Boussinesq 改善型方程常水深时的形式一致. 由此,从理论上证明了 Boussinesq 改善型方程[7,9]对色散性精度的提高,阐明了此类方程对色散项所保留的精度为 $O(\beta^3)$,而并非是此类方程推导之初的假设为 $O(\beta^2)$,这一点,将改变人们传统的认识.

为便于推导,本文一开始便假设水深为常数,对于变水深的情况,推导要复杂得多. 但对于工程实际情况来说,变水深问题无疑要重要得多,这方面的工作将作为今后的重点.

## 参 考 文 献


1 林建国. 波动力学的流面理论、Boussinesq 类方程及其浮体波动问题的求解. [博士论文]. 上海:上海交通大学, 1995 - 12 (Lin Jianguo. Flow Surface Theory. Boussinesq type equations and numerical, Simulation to Floating Body in Wave. Ph. D Thesis of Shanghai Jiaotong University, 1995 - 12 (in Chinese))

2 McCowan AD. The range of application of Boussinesq type numerical short wave models. Proc 22nd IAHR Congr, Switzerland, 1987. 279～384

3 Witting JM. A united model for the evolution of nonlinear water waves. *J Comput Phys*, 1984, 56: 203～236

4 Madsen PA, Murray R, Sorensen OR. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Eng*, 1991, 15: 371～388

5 Madsen PA, Murray R, Sorensen OR. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, a slowly varying bathymetry. *Coastal Eng*, 1992, 18: 183～205

6 Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J Waterway, Port, Coastal, Ocean, Eng*, 1993, 119: 618～638

7 Schaffer HA, Madsen PA. Further enhancements of Boussinesq - type equations. *Coastal Eng*, 1995, 26: 1～14

8 张永刚,李玉成. 促进其频散特征的另一种形式的 Boussinesq 方程. 力学学报, 1997, 29(2): 142～150 (Zhang Yonggang, Li Yucheng. Alternative form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(2): 142～150 (in Chinese))

9 林建国,邱大洪,邹志利. 新型 Boussinesq 方程的进一步改善. 海洋学报, 1998, 20(2): 112～119 (Lin Jianguo, Qiu Dahong, Zuo Zhili. Boussinesq - type equations with first - order of nonlinearity and fourth - order of dispersion. *Acta Oceanologica Sinica*, 1998, 20(2): 112～119 (in Chinese))

10 邹志利. 高阶 Boussinesq 水波方程. 中国科学(E 辑), 1997, 27(5): 460～473 (Zuo Zhili. Higher order Boussinesq equations. *Science in China (Series E)*, 1997, 27(5): 460～473 (in Chinese))

11 林建国,邱大洪. 二阶非线性与色散性的 Boussinesq 类方程. 中国科学(E 辑), (待发表). (Lin Jianguo, Qiu Dahong. Boussinesq type equations with two order of nonlinearity and dispersion, Science in China (Series E), to be published (in Chinese))

# BOUSSINESQ-TYPE EQUATIONS WITH FIRST-ORDER OF NONLINEARITY AND FOURTH-ORDER OF DISPERSION

Lin Jianguo　Qiu Dahong

*(State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng., Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China)*

**Abstract**　In this paper, the Boussinesq-type equations with first-order $O(\alpha)$ of nonlinearity and fourth-order $O(\beta^4)$ of dispersion is derived, in which, $\alpha = A/h_0$, $\beta = h_0/L$, $A$, $L$ and $h_0$ is typical value of wave amplitude, wavelength and water depth. By using the transforming velcity, the linear dispersion relation of our equations is consistent with fourth order pade approximation of the exact linear dispersion relation for Airy waves, this make the equations applicable to a wider range of water depths. Our results also proved that the accuracy of Schaffer's (1995) Boussinesq-type equations is the order of $O(\beta^4, \alpha)$, in which $O(\alpha) = O(\beta^4)$, not $O(\alpha) = O(\beta^2)$.

**Key words**　first-order of nonlinearity, fourth-order of dispersion, Boussinesq-type equations

Received 9 September 1996, revised 16 January 1998.