

损伤体有效弹性性质的细观分析 和不变性描述 ——一个考虑微缺陷相互作用的一般理论模式

高蕴昕 郑泉水 余寿文

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 通过引进微缺陷相互作用张量, 建立了一个二维情况下考虑微缺陷(微裂纹或微孔洞)间相互作用的损伤固体有效弹性性质的一般理论模式. 模型中考虑了微缺陷的几何形状、取向分布和空间分布所造成的有效柔度张量的各向异性和材料中微缺陷之间的相互作用所引起的损伤柔度张量的高阶效应. 针对微椭圆孔、微圆孔和微裂纹问题, 求得了相互作用张量的解析形式.

关键词 有效弹性性质, 各向异性损伤, 微缺陷相互作用张量, 微缺陷形态和分布

引 言

采用细观力学方法, 分析或估算由于微裂纹或微孔洞之类微缺陷造成对基体材料的损伤后的损伤体的有效力学性能的研究文献甚多. 如参见最近 Kachanov 等人的综述论文^[1, 2]. 非相互作用或稀疏模型是最简单的细观力学方法, 这种方法考虑了微缺陷的几何形状和取向分布的影响, 可给出有关问题的简单线性封闭解, 但没有考虑微缺陷相互作用和空间分布的影响. 当缺陷密度较大时, 需要考虑缺陷间的相互作用. 在各种考虑相互作用的细观力学方法中, 自洽法(Budiansky^[3], 1965; Hill^[4], 1965)最为简单, 但自洽法过多地考虑了相互作用的影响. 比如, 用自洽法求得的微裂纹损伤固体的有效柔度偏高, 在裂纹密度为 $9/16$ 时, 估算的有效 Young 模量为零^[5], 显然与实际不符. 微分法^[6]和广义自洽法^[7]是对自洽法的修正, 能够较为准确地估算有效弹性性质, 尤其是后者针对圆孔问题可以给出封闭解析解. 缺点是, 用微分法求解有效模量时, 有时不能保证其解的唯一性^[6]; 而用广义自洽法求解的包含微裂纹的二维损伤固体的有效弹性模量^[8]与后来严格证明的独立性定理^[9, 10]相矛盾. Mori - Tanaka 法^[11]是一种求解简便的方法, 对微孔洞的解也令人满意; 但对于微裂纹体的解, 其结果与非相互作用模型的结果相同.

还要提到的是上述各种处理微缺陷间相互作用的方法, 都是基于非相互作用模型, 引进了人为假设. 虽然这些假设使问题得到了很大的简化, 导致了比较满意的结果, 但是这些假设本身至今还缺乏坚实的力学理论支持. 此外, 上列方法也忽视了由于微缺陷的空间分布所引起的有时是显著的损伤各向异性.

1996 - 03 - 18 收到第一稿, 1998 - 03 - 10 收到修改稿.

本文基于细观力学分析,引进了所谓的微缺陷相互作用张量,从而建立了一个考虑微缺陷间相互作用的确定有效弹性柔度张量的新方法.这个方法有着较明确的力学理论背景,考虑了微缺陷的几何形状、取向分布和空间分布所造成的有效柔度张量的各向异性和材料中微缺陷之间的相互作用所引起的损伤柔度张量的高阶效应.针对微椭圆孔、微圆孔和微裂纹类型缺陷,具体导出了相互作用张量的解析表式.

1 考虑微缺陷间相互作用的有效性质的一般模式

如前所述,当微缺陷密度较大时,需要考虑微缺陷间的相互作用对损伤固体有效性质的影响.为了方便后面研究二维表示面元中含多个微缺陷时微缺陷间相互作用的一般关系,首先考察中只包含着一个边界为 ∂ 的微缺陷(微裂纹或微孔洞)的问题.设在 ∂ 的外边界 ∂ 上作用着面力 n ,这里 σ_0 为远场均匀应力, n 为 ∂ 的外法线,如图1(a)所示,以 ∂ 为外边界,以 Ω 为内边界的区域为基体材料区域,而区域 Ω_0 (以 ∂ 为外边界的区域)为缺陷所占的区域.由于所讨论的问题是在线弹性范围内,即基体和有效体均是线弹性体,所以线性叠加原理成立.图1(a)所示的问题可分解为如图1(b)所示的两个问题的叠加,或图1(c)所示的三个问题的叠加.图中 n 为 ∂ 的外法线,图1(c)最左边的区域已经不包含缺陷,只是用虚线标出原来缺陷的位置.关于这些分解简要解释如下:图1(a)分解为图1(b)比较明显.图1(b)的左边、图1(c)的左和右边部分在材料内部显然为均匀应力 σ_0 ,故图1(b)的左边等于图1(c)的左边减去图1(c)的右边,而图1(b)的右边与图1(c)的中间相同.

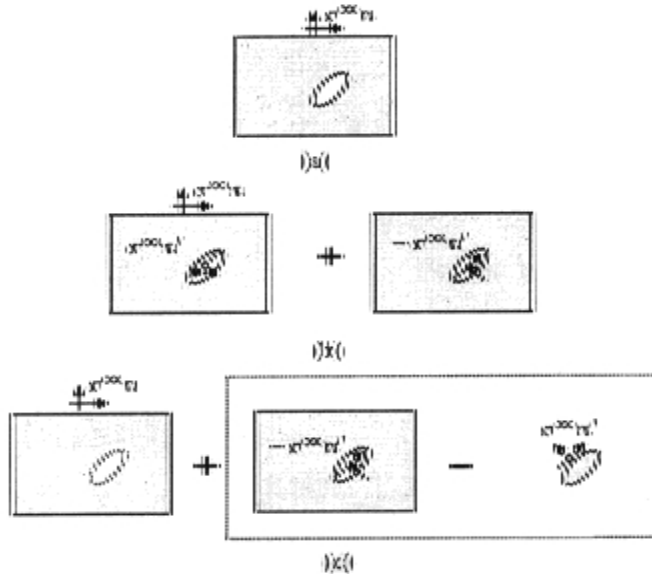


图 1 含单个缺陷的表示面元的叠加关系

Fig. 1 Superposition for RVE with a single microdefect

进行上述分解的目的,是通过分解可给出有效应变余能密度函数(用 C 表示)的一个清楚的力学解释.首先定义损伤柔度张量(用 H 表示)如下

$$H = S - S_0 \tag{1}$$

其中, S 和 S_0 分别表示有效体和基体的弹性柔度张量. 把(1)式代入有效比应变余能函数 C 的表示式, 得到

$$C = \frac{1}{2} :S: = \frac{1}{2} :S_0: + \frac{1}{2} :H: \quad (2)$$

其中“:”表示张量的双点积. 由于 $(1/2) :S_0:$ 恰恰是整个 V 中不含微缺陷时的应变余能密度函数, 正好对应图 1(c) 中的左图; 因此, $(1/2) :H:$ 的物理含义恰是图 1(c) 的中图和右图所示问题的平均余能密度函数. 从式(2)可以看出, 对损伤有影响的项为上述两项的后一项.

有了上面的准备, 我们现在研究表示面元 V 中包含有限 M 个边界分别为 ∂_I 的微缺陷问题, ∂_I 的外法线记为 n_I , 这里 $I=1, 2, \dots, M$. 在边界 ∂ 上承受面力 t_n , t_∞ 为远场均匀应力, n 为 ∂ 的外法线, 如图 2(a) 所示. 采用与处理只包含一个微缺陷的情况类似的办法, 可把上述包含 M 个微缺陷的问题分解为如图 2(b) 所示的 $(2M+1)$ 个简单问题的叠加, 其中附加应力 t_j 表征除第 I 个微缺陷之外还存在其他微缺陷这一实际情况的影响, 详见下面进一步的讨论.

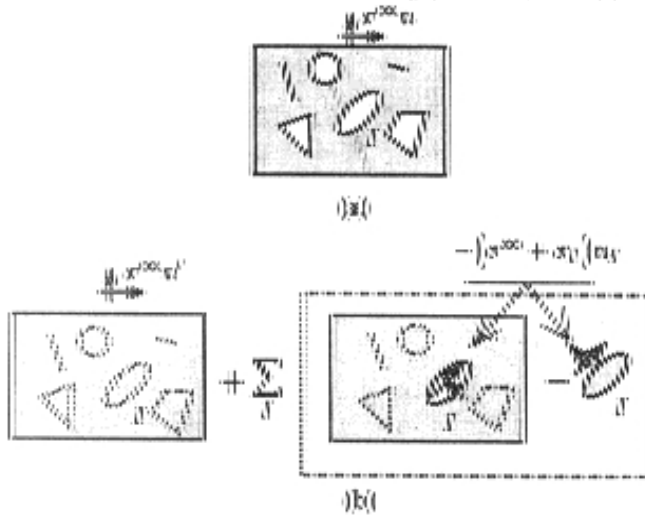


图 2 含多个缺陷表示面元的叠加关系

Fig. 2 Superposition for RVE with multi - microdefects

假设表示面元 V 中只包含第 J 个微缺陷, 且外边界 ∂ 上无面力作用, 只在该微缺陷的内边界 ∂_J 上作用着面力 $-(t_\infty + t_j) n_J$. 这时, 在原来第 I ($I \neq J$) 个缺陷边界 ∂_I 处产生的应力记为 $\sigma^{(I)}$, 在第 I 个缺陷形心位置处产生的应力记为 $\sigma^{(I)}$. 由于是线弹性问题, 故 $\sigma^{(I)}$ (以及 $\sigma^{(I)}$) 必然是 $(t_\infty + t_j)$ 的线性函数, 从而可表示为

$$\sigma^{(I)} = F^{(IJ)} : (t_\infty + t_j) \quad (3)$$

再考虑到 $\sigma^{(I)}$ 和 $(t_\infty + t_j)$ 均为对称二阶张量, 故 $F^{(IJ)}$ 是一个四阶张量, 且满足如下的指标对称性: $F_{ijkl}^{(IJ)} = F_{jikl}^{(IJ)} = F_{ijlk}^{(IJ)}$ (但一般而言并不一定具有对称性: $F_{ijkl}^{(IJ)} = F_{klij}^{(IJ)}$).

当缺陷尺寸与缺陷间距离相比较小时, 数值分析^[2]表明 $\sigma^{(I)}$ 是 $\sigma^{(I)}$ 的良好近似. 由于只需考虑 $\sigma^{(I)}$ 的某种平均影响, 本文以下假设用 $\sigma^{(I)}$ 代替 $\sigma^{(I)}$. 为了保证图 2(b) 所示的问题叠加后

的结果为图 2(a) 所示的问题,则必须要求附加应力 σ_i 满足

$$\sigma_i = \sum_{J=1}^M \sigma_i^{(IJ)} = \sum_{J=1}^M F^{(IJ)} : (\epsilon + \epsilon_J) \quad (4)$$

我们不妨规定,对于 $I=1, 2, \dots, M$, 都有 $\sigma_i^{(II)} = 0$ 和 $F^{(II)} = 0$. 由于 $F^{(IJ)}$ 刻画了缺陷间的相互作用,可称 $F^{(IJ)}$ 为相互作用张量 (interacting tensors). 本文和后续论文 (II) 将表明,相互作用张量在研究微缺陷的相互作用时起关键作用. 为此,本文第二节将确定 $F^{(IJ)}$ 的具体形式.

用 \mathbf{I} 表示二阶对称张量空间的单位变换,即四阶单位张量. 引进以四阶张量为元素的 $M \times M$ 阶矩阵 \mathbf{E} 和 \mathbf{F} 如下

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{I}_{M \times M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F^{(12)} & \dots & F^{(1M)} \\ F^{(21)} & 0 & \dots & F^{(2M)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F^{(M1)} & F^{(M2)} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

且记

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ M \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ M \end{Bmatrix} \quad (6)$$

则(4)式可简单写成

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}(\mathbf{S} + \mathbf{S}) \quad (7)$$

或

$$(\mathbf{E} - \mathbf{F})\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{S} \quad (8)$$

假设 $\mathbf{E} - \mathbf{F}$ 的逆存在,记为 \mathbf{G} ,即

$$\mathbf{G} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})^{-1} = (\mathbf{G}^{(IJ)}) = \mathbf{E} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 + \dots \quad (9)$$

则从式(8)可求解得

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{S} \quad (10a)$$

或

$$\mathbf{S} + \mathbf{S} = \mathbf{G}\mathbf{S} \quad (10b)$$

将上式写成明确的张量形式,则为

$$\sigma_i + \sigma_i = \sum_{J=1}^M G^{(IJ)} : \epsilon = G_I : \epsilon \quad (11a)$$

其中

$$G_I = \sum_{J=1}^M G^{(IJ)} \quad (11b)$$

有了上面的准备,下面就可以建立起考虑了缺陷间相互作用的有效应变余能的表达式. 比较图 1 和图 2 可见,图 2(b)中左边图对应的余能密度为 $(1/2) :S_0:$,而图 2(b)中右边求和号中的第 I 个图对应的平均余能密度则为 $(1/2) \left(:S_0: + H_I \right)$,这里 H_I 代表只含第 I 个微缺陷时的损伤柔度张量. 因此,总的余能密度函数为

$$C = \frac{1}{2} :S_0: + \frac{1}{2} :H: = \frac{1}{2} :S_0: + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \left(:S_0: + H_I \right) \quad (12)$$

其中 H 为原问题,即包含 M 个缺陷损伤体的损伤柔度张量. 将(11)式代入(12)得

$$\delta H: = :G_I^T: H_I: G_I: \quad (13)$$

其中, $()^T$ 表示 $()$ 的转置. 由(13)式并引用(9)式可立即得到考虑了相互作用的损伤柔度张量表达式如下

$$H = \sum_{I=1}^M G_I^T: H_I: G_I = H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)} + \dots \quad (14)$$

而有效弹性柔度张量由 H 求得为 $S = S_0 + H$. 引进 F_I 如下

$$F_I = \sum_{J=1}^M F^{(IJ)} \quad (15)$$

则(14)中 $H^{(I)}$ 分别为

$$H^{(1)} = \sum_{I=1}^M H_I \quad (16a)$$

$$H^{(2)} = \sum_{I=1}^M \left[H_I F_I + F_I^T H_I \right] \quad (16b)$$

$$H^{(3)} = \sum_{I,J=1}^M \left[H_I F^{(IJ)} F_J + (F^{(IJ)})^T H_I F_J + F_J^T (F^{(IJ)})^T H_I \right] \quad (16c)$$

等等.

从(14)和(16)式可以看出,损伤柔度张量 H 展开的第一项 $H^{(1)}$ 正是非相互作用模型的损伤柔度,与相互作用张量无关;二阶项 $H^{(2)}$ 以及更高阶各项反映了微缺陷相互作用的影响. 不难从(16)式观察到 $H^{(2)}$ 仅是由于微缺陷两两间相互作用引起的损伤柔度张量项;而 $H^{(n)}$ 中则包含了 n 个微缺陷间同时相互作用引起的损伤柔度张量项,我们称为 n 阶效应. 例如, $H^{(3)}$ 中包含了第 J 个微缺陷通过第 K 个微缺陷而实现的第 I 个微缺陷的影响,也包含了第 I 个微缺陷本身对第 J 个微缺陷影响后反过来对第 I 个微缺陷的影响,等等.

从(14)和(16)式可以看出,确定损伤柔度张量或有效弹性柔度张量的关键是确定相互作用张量 $F^{(IJ)}$ 和只包含单个缺陷的损伤柔度张量 H_I . 而文献中已经得到了多种典型单个缺陷的 H_I 张量,下面一节将求解微椭圆孔的相互作用张量 $F^{(IJ)}$ 的具体表达式.

2 微椭圆孔的相互作用张量 $F^{(IJ)}$

两个微缺陷间的相互作用与微缺陷的几何形状和相对位置相关。由于椭圆孔问题最为典型,下面通过具体求解微缺陷几何形状为椭圆孔的相互作用张量 $F^{(IJ)}$ 为例来说明有关确定 $F^{(IJ)}$ 的方法。

微椭圆孔 I 和 J 的相对位置如图 3 所示。对于表示面元 Ω 中只包含单个椭圆孔 J (参见图 3) 的问题。根据 $F^{(IJ)}$ 的定义, $(-F^{(IJ)} : \mathbf{1})$ 代表只在椭圆孔 J 的内边界 Γ_J 上作用单位应力时在第 I 个缺陷形心处产生的应力。因此,当只在椭圆孔的内边界 Γ_J 上作用面力 $(-n_J)$ 时,在第 I 个缺陷形心位置处的应力为 $F^{(IJ)} : (-n_J)$, 记为 s_I^* 。根据叠加原理,同样的区域(即只含单个缺陷 J),只在其外边界 ∂ 上作用面力 n ,而在孔边 Γ_J 处无应力作用时引起的第 I 个缺陷形心位置处的应力 s_I 则为

$$s_I = s_I^* + s_I = (F^{(IJ)} + \mathbf{I}) : n \quad (17)$$

由于 $F^{(IJ)}$ 只与微缺陷的几何形状和相对位置有关,而与所加的应力 n 无关。因此从理论上讲,只要给定足够次数的不同的 n ,然后由弹性理论求解出对应的 s_I ,就可以将 $F^{(IJ)}$ 的各个分量确定下来。但是,这样的一个直接的确定 $F^{(IJ)}$ 的途径往往十分繁杂。本文将运用有关张量表示结果^[12],可使上述问题变得较为简单。为此,我们首先给出所用到的二维张量表示理论的一些基本关系。

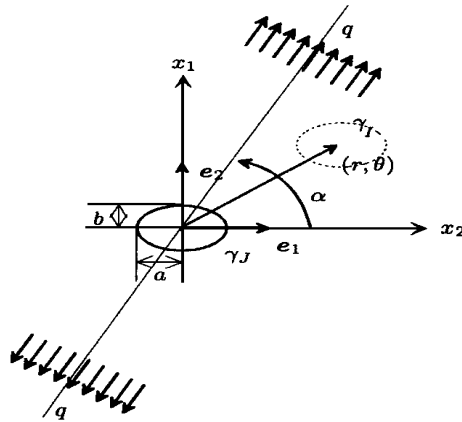


图 3 承受单拉应力含单个椭圆孔的无限大面域

Fig. 3 The interaction between two defects in representative area element

如果一个张量 A 的指标两两完全对称,且 A 关于每对指标的求和都等于零,则 A 称为不可约张量。比如通常俗称的二阶对称偏张量,便是二阶不可约张量。不难证明(如见文[12])任何非零阶的二维不可约张量最多只有两个独立分量,亦即任何非零阶的不可约张量空间都是二维的。记 e_1, e_2 为一正交坐标系 $\{x_i\}$ 的单位正交基矢量,则二阶和四阶不可约张量空间的两个正交张量基 $\{P_2, Q_2\}$ 和 $\{P_4, Q_4\}$ 可分别给出如下^[12]

$$P_2 = e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2, \quad Q_2 = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \quad (18a)$$

$$P_4 = P_2 \otimes P_2 - Q_2 \otimes Q_2, \quad Q_4 = P_2 \otimes Q_2 + Q_2 \otimes P_2 \quad (18b)$$

其中,“ \otimes ”表示张量积.如果选用极坐标系 $\{r, \theta\}$ (如图3所示)的基矢量 e_r 和 e_θ 代替(18)式中的 e_1 和 e_2 ,给出相应的张量基 $\{P_2, Q_2\}$ 和 $\{P_4, Q_4\}$,则有下列关系

$$P_2 = \cos^2 \theta P_2 + \sin^2 \theta Q_2, \quad Q_2 = -\sin^2 \theta P_2 + \cos^2 \theta Q_2 \quad (19a)$$

$$P_4 = \cos^4 \theta P_4 + \sin^4 \theta Q_4, \quad Q_4 = -\sin^4 \theta P_4 + \cos^4 \theta Q_4 \quad (19b)$$

后面还将用到下面描述交换性质的一个四阶张量 T :

$$T = P_2 \otimes Q_2 - Q_2 \otimes P_2 \quad (20)$$

对于相互作用张量 $F^{(U)}$,由于它满足对称性: $F_{ijkl} = F_{jikl} = F_{ijlk}$,其不变性不可约表示形式为^[12]

$$F^{(U)} = I + \mu \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + T + \mathbf{1} \otimes ({}_1P_2 + {}_1Q_2) + ({}_2P_2 + {}_2Q_2) \otimes \mathbf{1} + {}_1P_4 + {}_2Q_4 \quad (21)$$

其中, $\mu, {}_1, {}_1, {}_2, {}_2, {}_1, {}_2$ 为九个待定系数, $\mathbf{1}$ 为单位二阶张量,并当且仅当 $\mu = 0, {}_1 = {}_2, {}_1 = {}_2$ 时,对称性: $F_{ijkl}^{(U)} = F_{klij}^{(U)}$ 成立.

为了通过(17)式确定椭圆孔型缺陷的相互作用张量 $F^{(U)}$ 的具体表示,下面讨论无限大面域中含单个椭圆孔,在无限远处受到沿与 x_1 轴夹角为 θ 的方向(用 m 表示)均匀拉伸应力 q ,在椭圆孔内边界上无面力作用的问题(如图3所示).这个问题的弹性理论精确解可见一般的弹性理论教课书^[13].对于这个具体问题,不难把(17)式中的有关应力张量写成如下形式

$$= qm \otimes m = q(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \otimes (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) = \frac{q}{2} (\mathbf{1} + \cos 2\theta P_2 + \sin 2\theta Q_2) \quad (22)$$

$$s_I = {}_{rr}e_r \otimes e_r + {}_{\theta\theta}e_\theta \otimes e_\theta + {}_{r\theta}(e_r \otimes e_\theta + e_\theta \otimes e_r) = \frac{1}{2} \{ ({}_{rr} + {}_{\theta\theta}) \mathbf{1} + [({}_{rr} - {}_{\theta\theta}) \cos 2\theta - 2 {}_{r\theta} \sin 2\theta] P_2 + [({}_{rr} - {}_{\theta\theta}) \sin 2\theta + 2 {}_{r\theta} \cos 2\theta] Q_2 \} \quad (23)$$

上式(23)中的应力分量 ${}_{rr}, {}_{\theta\theta}$ 和 ${}_{r\theta}$ 由弹性理论的复应力函数解答导出,具体表达式详见附录A.

将(21)~(23)式代入(17)式,即可得到一个恒等式,比较等式两边的基张量 P_2, Q_2 和单位张量 $\mathbf{1}$ 的系数,又得到三个关于自变量 θ 的恒等式(因为对任意的 $\theta, F^{(U)}$ 是不变的),再比较这三个恒等式的等式两边的自变量 θ 的系数,就可确定出 $F^{(U)}$ 的表示式(21)中的九个待定系数 μ, \dots 等(详见附录A),其结果如下面各式所示

$$\begin{aligned}
 &= -R_2 \cos 2\alpha - I_2 \sin 2\alpha - 1 \\
 &= \frac{1}{2} (R_2 \sin 2\alpha - I_2 \cos 2\alpha) \\
 \mu &= \frac{1}{2A} (-m^2 - 4 + 1) + \frac{1}{2} (R_2 \cos 2\alpha + I_2 \sin 2\alpha) \\
 i_1 &= \frac{1}{A} (-m^2 \cos 2\alpha + m^4), \quad i_1 = \frac{1}{A} m^2 \sin 2\alpha \\
 i_2 &= -\frac{1}{2} (R_3 \cos 2\alpha + I_3 \sin 2\alpha), \quad i_2 = \frac{1}{2} (-R_3 \sin 2\alpha + I_3 \cos 2\alpha) \\
 (i_1 - \frac{1}{2} A \frac{1}{2} (R_1 \cos 2\alpha + I_1 \sin 2\alpha), \quad i_2 = \frac{1}{2} (R_1 \sin 2\alpha + I_1 \cos 2\alpha))
 \end{aligned}$$

www.cnki.net

)]

三种类型几何形状的微缺陷的相互作用张量,它们在细观力学分析中具有典型意义.由(28)式可见,当孔间距离 r 比孔洞半径 a 大许多时, $F^{(U)}$ 将变的很小,从而知式(9)的逆的确存在.

3 单个缺陷引起的损伤柔度限量 H_I 的典型结果

本文所建立的考虑微缺陷相互作用的一般模式还用到单个缺陷引起的损伤柔度张量 H_I .一般而言,由于 H_I 满足 Voigt 对称性: $H_{ijkl}^{(I)} = H_{jikl}^{(I)} = H_{ijlk}^{(I)} = H_{klij}^{(I)}$,由张量表示结果^[12]或参照(21)式,可得到其在完全各向异性情况下的一般不变性表示形式如下

$$H_I = a_1 \mathbf{I} + a_2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + a_3 \mathbf{1} \quad \mathbf{P}_2 + a_4 \mathbf{1} \quad \mathbf{Q}_2 + a_5 \mathbf{P}_4 + a_6 \mathbf{Q}_4 \quad (29)$$

其中符号“ \otimes ”代表: $\mathbf{1} \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \otimes \mathbf{1}$,等等; $a_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为待定的表征缺陷几何形状的参数.对于具体给定几何形状的缺陷, a_i 可以通过弹性理论的解答确定下来.文[14]给出下面几种典型几何形状微缺陷的 H_I 的不变性表示形式

$$(1) \text{ 椭圆孔: } H_I = \frac{ab}{E_0 S} \left[\frac{4}{1-m^2} \mathbf{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{2m}{1-m^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \otimes \mathbf{1}) \right] \quad (30)$$

$$(2) \text{ 微裂纹: } H_I = \frac{a^2}{E_0 S} \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \otimes \mathbf{1}) \right] \quad (31)$$

$$(3) \text{ 圆孔: } H_I = \frac{a^2}{E_0 S} [4\mathbf{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \quad (32)$$

其中 E_0 为材料初始无缺陷时的 Young 模量, S 为表示面元的面积.

至此,我们建立了一个能够考虑缺陷间的相互作用与缺陷的几何形状、取向分布和空间分布的一般理论模式.

参 考 文 献

- 1 Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. *Appl Mech Rev*, 1992, 45: 304 ~ 335
- 2 Kachanov M, Tsukrov I, Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Appl Mech Rev*, 1994, 47: S151 ~ S174
- 3 Budiansky B. On the elastic moduli of heterogeneous material. *J Mech Phys Solids*, 1965, 13: 223 ~ 227
- 4 Hill R. A self-consistent mechanics of composite material. *J Mech Phys Solids*, 1965, 13: 213
- 5 Budiansky B, O'Connell RJ. Elastic moduli of a cracked solid. *Int J Solids Strut*, 1976, 12: 81 ~ 97
- 6 Norris AN. A differential scheme for the effective moduli of composite. *Mech Mater*, 1985, 4: 1
- 7 Christensen RM, Lo KH. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27: 315
- 8 Huang Y, Hu KK, Chandra A. A generalized self-consistent mechanics method for microcracked solids. *J Mech Phys Solids*, 1994, 42: 1273 ~ 1291
- 9 Zheng QS, Hwang KC. Two-dimensional elastic compliance of materials with holes and microcracks. *Proc Roy Soc Lond*, A452: 2493 ~ 2507
- 10 Zheng QS, Hwang KC. Reduced dependence of defect compliance on matrix and inclusion elastic properties in two-dimensional elasticity. *Proc Roy Soc Lond*, A453: 353 ~ 364
- 11 Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite material. *Mech Mater*, 1987, 6: 147 ~ 157

- 12 Zheng QS. Theory of representations for tensor functions: A unified invariant approach to constitutive equations. *Appl Mech Rev*, 1994, 47: 545 ~ 587
- 13 徐芝纶编. 弹性力学. 北京:人民教育出版社,1980 (Xu Zhilun. Mechanics of Elasticity. Beijing: People's Education Pub, 1980 (in Chinese))
- 14 Zheng QS. A unified invariant description of micromechanically - based effective elastic properties for two - dimensional damaged solids. *Mech Mater*, 1997, 25: 273 ~ 289

附录 A

正文(23)式中的应力分量 σ_{rr} 和 $\sigma_{r\theta}$ 由弹性理论的复变函数解答^[12]给出如下

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = q \operatorname{Re} \left(\frac{2e^{2i} - m}{m^2 - 1} \right) \quad (A1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = \frac{q(m^4 + 2)}{4(m - \frac{2}{4})(m^2 - 1)} \left[\frac{m(1 + m^2 - 2e^{2i})}{m^2 - 1} + 2e^{2i} - m \right] + \frac{q}{2(m - \frac{2}{4})} \left[ke^{2i} - \frac{2(3e^{2i} - 2 + me^{2i} - m^2 - 1)}{m^2 - 1} \right] \quad (A2)$$

其中“Re”表示的实部, $i = \sqrt{-1}$, 复变量 z 表示

$$z = (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (A3)$$

将(A3)式代入(A1)和(A2)式,运用计算机代数(Maple V)将(A1)和(A2)式的实部和虚部分开,可以将应力分量 σ_{rr} 和 $\sigma_{r\theta}$ 的具体表达式写成如下形式

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \frac{q}{A} (-2^2 \cos^2 \theta \cos^2 \theta + 2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta + 2m^4 \cos^2 \theta - m^2 \theta^4 + 1) \quad (A4)$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = q[(R_1 + R_2) \cos^2 \theta + (-I_1 + I_2) \sin^2 \theta + R_3] \quad (A5)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{q}{2} [(R_1 - R_2) \sin^2 \theta + (I_1 + I_2) \cos^2 \theta + I_3] \quad (A6)$$

其中符号如正文中式(27)所示.

将正文(22)式代入(17)式得

$$\begin{aligned} (F^{(U)} + I) : &= \frac{q}{2} (\theta + 1 + 2\mu + 2\theta_1 \cos^2 \theta + 2\theta_1 \sin^2 \theta) \mathbf{1} + \\ &\frac{q}{2} [(\theta + 1) \cos^2 \theta + 2\theta_1 \sin^2 \theta + 2\theta_2 + 2\theta_1 \cos^2 \theta + 2\theta_2 \sin^2 \theta] P_2 + \\ &\frac{q}{2} [(\theta + 1) \sin^2 \theta - 2\theta_1 \cos^2 \theta + 2\theta_2 - 2\theta_1 \sin^2 \theta + 2\theta_2 \cos^2 \theta] Q_2 \end{aligned} \quad (A7)$$

注意到正文(17)式,可以看出正文(23)式等号右边和(A7)式等号右边恒等,比较基张量 P_2 , Q_2 和单位张量 $\mathbf{1}$ 的系数可得下列三个关于 θ 的恒等式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= q(\theta + 1 + 2\mu + 2\theta_1 \cos^2 \theta + 2\theta_1 \sin^2 \theta) \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \cos^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \sin^2 \theta &= \\ q[(\theta + 1) \cos^2 \theta + 2\theta_1 \sin^2 \theta + 2\theta_2 + 2\theta_1 \cos^2 \theta + 2\theta_2 \sin^2 \theta] & \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \sin^2 \theta + 2\sigma_{r\theta} \cos^2 \theta &= \\ q[(\theta + 1) \sin^2 \theta - 2\theta_1 \cos^2 \theta + 2\theta_2 - 2\theta_1 \sin^2 \theta + 2\theta_2 \cos^2 \theta] & \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 (\mu + 1 + 2\mu) A &= -m^2 + 1, \quad A_1 = -\cos^2 \alpha + m^4, \quad A_2 = \sin^2 \alpha \\
 + 1 + 2I_1 &= -(R_1 + R_2)\cos\alpha - (I_1 + I_2)\sin\alpha \\
 + 1 - 2I_1 &= (R_1 - R_2)\cos\alpha - (-I_1 + I_2)\sin\alpha \\
 2(I_1 + I_2) &= (I_1 - I_2)\cos\alpha - (R_1 - R_2)\sin\alpha \\
 2(-I_1 + I_2) &= (I_1 + I_2)\cos\alpha - (R_1 + R_2)\sin\alpha \\
 2I_2 &= -R_3\cos\alpha - I_3\sin\alpha, \quad 2I_3 = -R_3\sin\alpha + I_3\cos\alpha
 \end{aligned} \right\}$$

www.cnki.net

$$\mathbf{H} = \sum_{I=1}^M \mathbf{G}_I^T : \mathbf{H}_I : \mathbf{G}_I = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^{(3)} + \dots$$

where

$$\mathbf{F}_I = \sum_{J=1}^M \mathbf{F}^{(IJ)}, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \sum_{I=1}^M \mathbf{H}_I, \quad \mathbf{H}^{(2)}_s = \sum_{I=1}^M \left[(\mathbf{H}_I \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_I^T \mathbf{H}_I), \text{ etc.} \right]$$

One can see that the interactors play the key role in taking account of the interaction effect. The analytical forms of the interactors for circle micro - holes, ellipsoidal micro - holes, and micro - cracks are obtained. These results are applied to derive the damage tensors \mathbf{H} for various arrangements of the corresponding micro - defects.

Key words effective elastic properties, anisotropic damage, micro - defect interactors, morphology and distribution of micro - defects

www.cnki.net