

# 具有局部非线性动力系统周期解 及稳定性方法<sup>1)</sup>

张家忠 许庆余 郑铁生

(西安交通大学工程力学系, 西安 710049)

**摘要** 对于具有局部非线性的多自由度动力系统, 提出一种分析周期解的稳定性及其分岔的方法. 该方法基于模态综合技术, 将线性自由度转换到模态空间中, 并对其进行缩减, 而非线性自由度仍保留在物理空间中. 在分析缩减后系统的动力特性时, 基于 Newmark 法的预估 - 校正 - 局部迭代的求解方法, 与 Poincaré 映射法相结合, 推导出一种确定周期解, 并使用 Floquet 乘子判定其稳定性及分岔的方法.

**关键词** 非线性动力学, 稳定性, 分岔, 转子, 轴承

## 引 言

对于线性动力系统的动力特性分析, 无论是其理论还是应用都已很成熟, 但是对于实际中的一些强非线性动力系统, 采用线性近似, 其结果与实际情况相差较大, 主要原因是线性理论将一些非线性现象: 亚谐波振动、跳跃现象、极限环运动等过滤掉. 由于近十几年来非线性动力系统理论及计算机技术的发展, 产生了许多用于非线性系统的定量分析方法: 摄动法、多尺度法、谐波平衡法、伽辽金法等<sup>[1~3]</sup>, 这些方法在确定周期解及其稳定性问题中是很有效的, 但是, 对于多自由度系统, 其系数的确定是一很费机时的过程.

具有局部非线性的多自由度动力系统中经常遇到的, 其中具有非线性轴承支承的、有质量偏心的转子动力系统就是一个典型的例子, 对于这类非线性动力系统, 随着系统参数的变化, 系统的稳态周期响应将发生二次 Hopf 分岔、倍周期分岔、鞍 - 结分岔, 系统的长时间动力行为将表现为: 周期运动、准周期运动、倍周期运动、跳跃现象及混沌运动, 即周期运动的失稳将导致一些复杂的运动, 因此, 确定周期解及其稳定性成为非线性动力系统理论中的一个重要内容.

本文基于固定界面模态综合法, 提出一种方法: 将线性自由度转换到模态空间中, 并对其进行缩减, 而将非线性自由度仍保留在物理空间中, 在分析缩减后系统的动力特性时, 将基于 Newmark 法的预估 - 校正 - 局部迭代的求解方法与 Poincaré 映射法<sup>[4]</sup>相结合, 推导出利用 Floquet 乘子确定周期解及其稳定性.

## 1 非线性动力系统中线性自由度的缩减

对于具有局部非线性的动力系统, 虽然非线性自由度仅占总自由度数的一小部分, 但其却影响着整个系统的动力特性, 因此, 在自由度缩减的过程中, 设法将非线性自由度仍保留在物理空间中, 仅在模态空间中缩减线性自由度.

<sup>1)</sup>国家自然科学基金八五重点课题资助项目(59335100).

1997 - 08 - 06 收到第一稿, 1997 - 12 - 18 收到修改稿.

对于图 1 所示的动力系统,在子结构  $r$  中,含有大量的线性自由度,取  $A, B$  处的自由度(非线性)为界面自由度  $\{x_j\}$ ,其它自由度为内部自由度  $\{x_i\}$ ,这样就可采用固定界面分模态综合法<sup>[5]</sup>,对系统的自由度进行缩减.

假设具有多子结构、局部非线性的动力系统的第  $s$  子结构的运动方程为

$$[M]_s \ddot{x} + [C]_s \dot{x} + [K]_s x = \{g(t)\}_s + \{f(\{x\}, \{\dot{x}\})\}_s \quad (1)$$

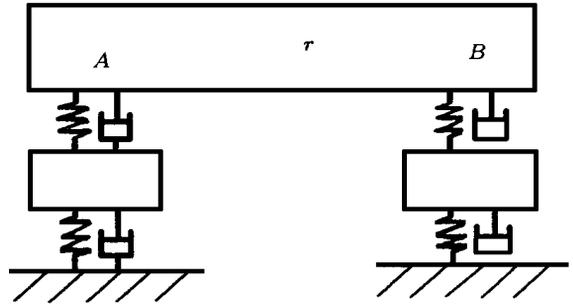


图 1 具有局部非线性的动力系统

Fig.1 Dynamic system with local nonlinearity

其中  $\{g(t)\}_s$  为外载荷向量,  $\{f(\{x\}, \{\dot{x}\})\}_s$  为交接面上的力向量(非线性),并假定各矩阵已按线性、非线性自由度进行了分块.

根据各子结构间界面位移的协调条件,将各子结构的运动方程综合成整个系统的运动方程

$$[ \tilde{M} ] \ddot{u} + [ \tilde{C} ] \dot{u} + [ \tilde{K} ] u = \begin{cases} 0 \\ f(\{u_2\}, \{\dot{u}_2\}) \end{cases} + \{ \bar{g}(t) \} \quad (2)$$

其 准 定 是 倍 动 非 线 性 的 变

在此,  $\{u_1\}$  为线性自由度的模态坐标,  $\{u_2\}$  为系统在物理空间中的非线性自由度. 其中的  $[ \tilde{M} ]$  是由各子结构缩减后的质量矩阵组成,即:

$[ \tilde{M} ]_s = [ T ]_s^T [ \tilde{M} ]_s [ T ]_s$ ,  $[ T ]_s$  是由界面主模态及约束模态组成的坐标变换矩阵,对于  $[ \tilde{C} ]$ ,  $[ \tilde{K} ]$  具有同样的性质. 而  $\{ \bar{g}(t) \} = [ T ]_s^T \{ g(t) \}$ . 其中的非线性力仍保留在物理空间中,从而方程(2)中的自由度从量级上得到缩减,是一自由度较少的动力方程.

## 2 基于 Newmark 法的预估 - 校正 - 局部迭代方法

为提高求解方程(2)的计算及收敛速度,将一般的 Newmark 方法进行了改进,该方法仅对非线性自由度进行迭代,同时采用一种预估格式,提高收敛速度.

按照 Newmark 法:(为书写方便,将自由度  $\{u_1\}, \{u_2\}$  写成统一形式  $\{u\}$ )

$$\{ \ddot{u}_{t+\Delta t} \} = a_1 (\{ u_{t+\Delta t} \} - \{ u_t \}) + a_2 \{ \dot{u}_t \} + a_3 \{ \ddot{u}_t \} \quad (3)$$

$$\{ \dot{u}_{t+\Delta t} \} = b_1 (\{ u_{t+\Delta t} \} - \{ u_t \}) + b_2 \{ \dot{u}_t \} + b_3 \{ \ddot{u}_t \} \quad (4)$$

系统  $t + \Delta t$  时刻的响应满足方程(2),将式(3), (4)代入得到

$$[ \bar{K} ] \{ u_{t+\Delta t} \} = c \{ \bar{g} \} + \begin{cases} 0 \\ f(\{u\}, \{\dot{u}\}) \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\{ u_{t+\Delta t} \} = \begin{cases} u_{1t+\Delta t} \\ u_{2t+\Delta t} \end{cases}$$

$$[ \bar{K} ] \triangleq a_1 [ \tilde{M} ] + [ \tilde{K} ] + b_1 [ \tilde{C} ]$$

$$\{ \bar{g} \} \triangleq \{ \bar{g}(t + \Delta t) \} + [ \tilde{M} ] \{ a_1 \{ u_t \} - a_2 \{ \dot{u}_t \} - a_3 \{ \ddot{u}_t \} \} +$$

$$[\bar{C}]\{b_1\{u_t\} - b_2\{\dot{u}_t\} - b_3\{\ddot{u}_t\}\}$$

将方程(5)写成下列形式

$$\text{态综} \quad [ \begin{array}{c} \text{运动} \\ \text{综} \end{array} ] \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] \end{bmatrix} \begin{cases} u_{1t+\tau} \\ u_{2t+\tau} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ f(\{u_2\}, \{\dot{u}_2\}) \end{cases} \quad (6)$$

并将方程(6)展开得

$$[\bar{K}_{11}]\{u_1\} + [\bar{K}_{12}]\{u_2\} = \{\tilde{g}_1\} \quad (7)$$

$$[\bar{K}_{21}]\{u_1\} + [\bar{K}_{22}]\{u_2\} = \{\tilde{g}_2\} + \{f(\{u_2\}, \{\dot{u}_2\})\} \quad (8)$$

由式(7), (8)得到下列关系式

$$\{u_1\} = [\bar{K}_{11}]^{-1}\{\tilde{g}_1\} - [\bar{K}_{12}]\{u_2\}, \quad \text{其中} [\bar{K}_{11}] \text{ 正定} \quad (9)$$

$$\bar{K}\{u_2\} = \{\tilde{g}_2\} + \{\tilde{g}_3\} + \{f(\{u_2\}, \{\dot{u}_2\})\} \quad (10)$$

其中

$$[\bar{K}] = [\bar{K}_{22}] - [\bar{K}_{21}][\bar{K}_{11}]^{-1}[\bar{K}_{12}], \quad \{\tilde{g}_3\} = -[\bar{K}_{21}][\bar{K}_{11}]^{-1}\{\tilde{g}_1\}$$

方程(10)是一非线性代数方程组,在一定初始条件下,方程(10)与(3), (4)联合,通过迭代可求得任一时刻的响应(非线性自由度),然后由式(9)求出线性自由度的模态坐标响应值.

为提高迭代的收敛速度,在每时刻的迭代前,采用下列格式对初值进行预估

$$\{u_{t+\tau}\} = \{u_t\} + \tau\{\dot{u}_t\} + \frac{1}{2}\tau^2\{\ddot{u}_t\}$$

$$\{\dot{u}_{t+\tau}\} = \{\dot{u}_t\} + \tau\{\ddot{u}_t\}$$

$$\{\ddot{u}_{t+\tau}\} = \{\ddot{u}_t\}$$

其中  $\tau$  决定着算法的稳定性,根据一些算例分析,一般取  $\tau \leq 0.1$ .

### 3 周期解的确定及其稳定性分析

#### 3.1 Poincaré映射中不动点的确定

本文主要对如下形式的非自治动力系统进行分析,研究其周期解的稳定性

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = f(\{u\}, \{\dot{u}\}, t, \mu), \quad (u, \dot{u}, t, \mu) \in (R^n, R^n, R, R) \quad (11)$$

具有:  $f(\{u\}, \{\dot{u}\}, t + T, \mu) = f(\{u\}, \{\dot{u}\}, t, \mu)$

对于周期轨道稳定性的研究,等同于 Poincaré映射中不动点的确定及其稳定性分析.

对于由式(11)描述的周期性非自治动力系统,如果在其轨道上每隔一个周期  $T$  取一个截面,就将原来连续的动力系统转化为一个离散的动力系统

$$\left. \begin{array}{l} y: U \times J \rightarrow R^{2n}, v \rightarrow y(v, \mu) \\ v \in U \subseteq R^{2n}, \mu \in J \subseteq R \end{array} \right\}$$

根据定义，Poincaré 截面上的不动点采用下面的方法确定

$$r(\{u_0\}, \{\dot{u}\}) = \begin{cases} u_T(\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}) \\ \dot{u}_T(\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}) \end{cases} - \begin{cases} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{cases} = \{0\} \quad (13)$$

综

上式的求解需与方程(2)联合。其中  $\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}$  为 Poincaré 截面上的不动点，对于不动点的求解，可以采用 Newton-Raphson 迭代法，其迭代格式如下

$$\begin{cases} u_0^{i+1} \\ \dot{u}_0^{i+1} \end{cases} = \begin{cases} u_0^i \\ \dot{u}_0^i \end{cases} - [Dr(\{u_0\}^i, \{\dot{u}_0\}^i)]^{-1} \cdot r(\{u_0\}^i, \{\dot{u}_0\}^i) \quad (14)$$

其中  $[Dr(\{u_0\}^i, \{\dot{u}_0\}^i)] = [D]K [I]$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}} & \frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{\dot{u}_0}} \\ \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{u_0}} & \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{\dot{u}_0}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中的  $\frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}}, \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{u_0}}, \frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{\dot{u}}}, \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{\dot{u}_0}}$  由下列初值问题确定

$$[M] \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}} \\ \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{u_0}} \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}} \\ \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{u_0}} \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}} \\ \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{u_0}} \end{bmatrix} = [0]$$

一般取  $\frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}} \Big|_{t=0} = [I]$  其周  $\frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{\dot{u}_0}} \Big|_{t=0} = [0]$  稳定性

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中

$$[K] = [\bar{K}] - \left[ \frac{\partial f(\{u_2\}, \{\dot{u}_2\})}{\partial u} \right]$$

$$[C] = [\bar{C}] - \left[ \frac{\partial f(\{u_2\}, \{\dot{u}_2\})}{\partial \dot{u}} \right] \quad d$$

采用 Newmark 方法确定方程(16)，(17)的解，将 Newmark 法的一些假设代入上式，则得到

下列形式的方程(为书写方便，将方程(16)，(17)中的  $\frac{\partial f_{u_T}}{\partial f_{u_0}}, \frac{\partial f_{\dot{u}_T}}{\partial f_{\dot{u}_0}}$  统统记作  $[V]$ )

$$[K][V]_{t+\tau} = [G] \quad (18)$$

其中 由式 散的 统 离

$$[K] \triangleq a_1[\tilde{M}] + [K] + b_1[C]$$

$$[G] \triangleq [\tilde{M}][a_1[V]_t - a_2[V]_{t-\tau} - a_3[V]_{t-2\tau}] + [C][b_1[V]_t - b_2[V]_{t-\tau} - b_3[V]_{t-2\tau}]$$

方程(16), (17)是矩阵微分方程,方程(18)的求解,需与方程(2)联合,由上面的推导过程看出:在某一时刻,  $[K], [C]$  可通过求解方程(2)时得到,则  $[V]_{t+\tau} = [K]^{-1}[G]$ , 其中  $[K]$  是一正定矩阵.

### 3.2 Poincaré映射中不动点的稳定性

设当  $\mu = \mu_0$  时,由式(12)定义的映射有一不动点  $v_0$ ,即  $y(v_0, \mu_0) = v_0$ ,则该不动点的稳定性及分岔特性可以通过求解关于  $v$  的导算子  $D_v y(v_0, \mu_0)$  的特征根确定.

式(15)中的矩阵  $[D]$  就是前面提到的导算子,其所对应的特征根就是用来判断周期解稳定性的 Floquet 乘子<sup>[7]</sup>.

## 4 算例分析

图2为一实际转子系统,该系统在滑动轴承外又串联了具有外弹性支承的挤压油膜阻尼器,由于油膜力的强非线性,该系统为一局部非线性的动力系统,其中四只圆盘的结构相同,两组轴承及阻尼器的结构相同,各参数取表1所列的值.

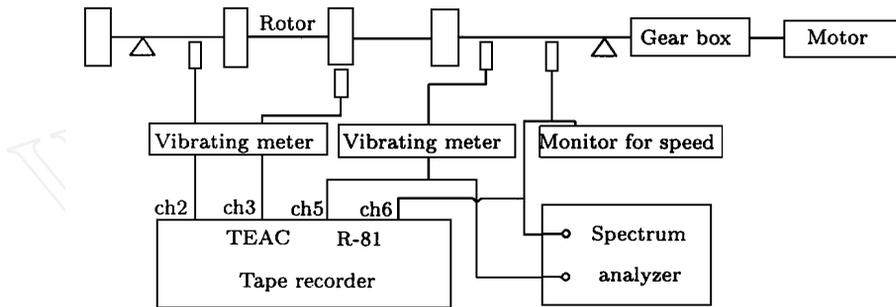


图2 测试及实验装置

Fig. 2 Schematic of vibration test facility and test rig

表1 系统的参数值

Table 1 Parameter values of the system

Shaft diameter (cm)	Shaft length (cm)	Lumped mass (kg)
7.6	131	13.0
Diametral inertia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	Polar inertia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	Mass eccentricity (mm)
0.062	0.12	$8.0 \times 10^{-2}$
Bearing diameter (cm)	Bearing length (cm)	Damper diameter (cm)
7.6	3.04	16.0
Damper length (cm)	Bearing house mass (kg)	Stiffness of flexible support kN/m
4.8	6.8	1724.8

采用有限元方法对转子动力系统进行力学建模,其中挤压油膜阻尼器、滑动轴承中的油膜力及其 Jacobi 矩阵的求解,基于变分不等式理论,同样采用有限元方法确定<sup>[6]</sup>.

将转轴剖分为 10 个单元,轴承体视为刚体,这样整个系统共有 8 个非线性自由度,在对系统进行自由度缩减时,仅保留系统的前四阶主模态(与保留系统前 6 阶主模态及直接积分法所得结果相同).

根据计算,在转速为  $0 \sim 12\ 600\ \text{r/min}$  范围内,系统有稳定的周期响应,图 3,图 4 为通过数值积分求得的轴颈中心、轴承体中心的运动轨迹(限于篇幅,只给出一组轴颈中心、轴承体中心的运动轨迹)。将转速继续增大为  $12\ 674.734\ \text{r/min}$  时,系统发生二次 Hopf 分岔,即有一对复共轭形式的 Floquet 乘子穿过单位圆,系统将表现为准周期运动,图 5,图 6 是系统在转速为  $13000\ \text{r/min}$  时相应的运动轨迹。

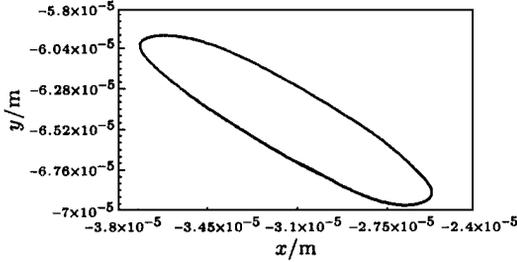


图 3 轴颈中心运动轨迹

Fig. 3 Orbit for the journal centre

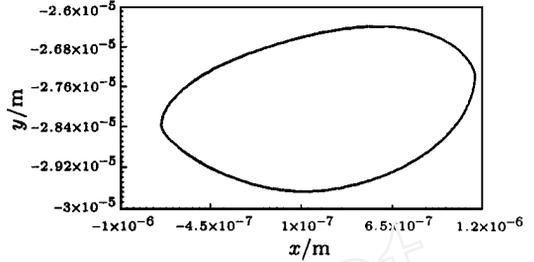


图 4 轴承体中心运动轨迹

Fig. 4 Orbit for the bearing centre

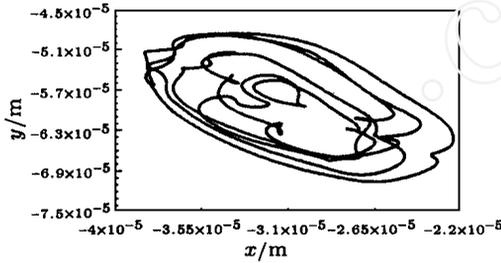


图 5 轴颈中心运动轨迹

Fig. 5 Orbit for the journal centre

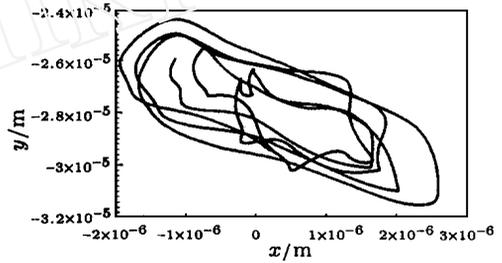


图 6 轴承体中心运动轨迹

Fig. 6 Orbit for the bearing centre

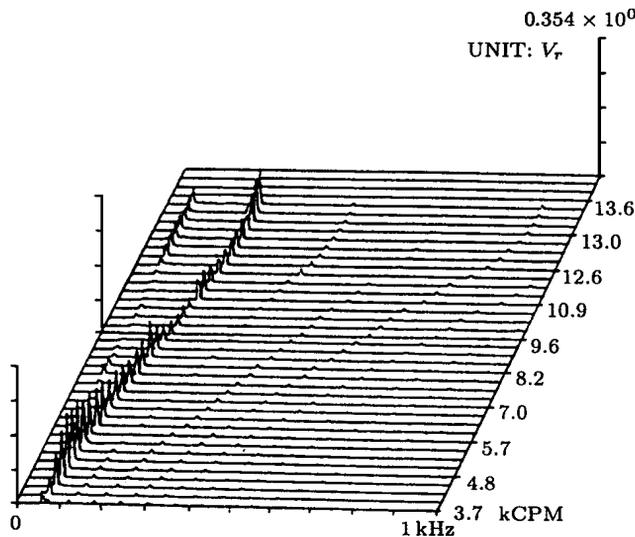


图 7 ch2 的频谱图

Fig. 7 Displacement frequency spectrum

除对系统进行了数值分析外,还对其进行了实验研究,图 7 为 ch2 所测响应的频谱分析,由图看出:转速在  $0 \sim 12200\text{r/min}$  范围内,系统有稳定的周期运动,随转速增大,其中出现低频成份,系统表现为非谐调响应。

## 5 结 论

将固定界面分模态综合法、基于 Newmark 法的预估 - 校正 - 局部迭代法及 Poincaré 映射法结合,推导出一种确定非线性动力系统周期解及应用 Floquet 乘子分析其稳定性的方法,该方法特别适用于分析具有局部非线性的多自由度动力系统的特性,可以大幅度地缩减系统的线性自由度,提高数值计算的稳定性及收敛速度,并且在求解 Floquet 乘子时,只需要分析一低阶矩阵的特征值。

## 参 考 文 献

- 1 Pierre C. Multi - Harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52(4) : 958 ~ 964
- 2 Senjanovic I. Application of the harmonic acceleration method for nonlinear dynamic analysis. *Computers & Structures*, 1993, 47(6) : 927 ~ 937
- 3 Nataraj C. Periodic solution in rotor dynamic systems with nonlinear supports: A general approach. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 1989, 111(1) : 187 ~ 193
- 4 Parker TS. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York: Springer - Verlag, 1989
- 5 王文亮. 结构振动与动态子结构方法. 上海:复旦大学出版社,1985 (Wang Wenliang. *Structural Vibration and Dynamic Substructure Method*. Shanghai China, Publishing House of Fudan University, 1985 (in Chinese))
- 6 郑铁生. 一类椭圆型变分不等式离散问题的迭代算法. 应用数学和力学,1995, 16(4) : 329 ~ 335 (Zheng Tiesheng. An iterative method for the discrete problems of a class of elliptical variational inequalities. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 16(4) : 329 ~ 335 (in Chinese))
- 7 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分岔. 北京:北京航空航天大学出版社,1989 (Lu Qishao. *Qualitative Description and Bifurcation of Ordinary Differential Equation*. Beijing China, Publishing House of the Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1989 (in Chinese))

## A METHOD FOR DETERMINING THE PERIODIC SOLUTION AND ITS STABILITY OF A DYNAMIC SYSTEM WITH LOCAL NONLINEARITIES<sup>1)</sup>

Zhang Jiazhong Xu Qingyu Zheng Tiesheng

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** The analysis of dynamic system with many degrees of freedom can be highly complex in the presence of strong nonlinearities, but it is important to understand the mechanisms of some phenomena. The fundamental response of a nonlinear nonautonomous system is periodic, other motions, such as quasi-periodic, jump, period-doubling and chaotic motion, can bifurcate from periodic motion when a system parameter is changed.

Therefore, determining the periodic solution and its stability are required in such case. A method for determining the periodic solution and its stability of a dynamic system with local nonlinearities is presented. The linear degrees of freedom of components are condensed by using the mode synthesis technique, while the nonlinear degrees of freedom are still in physical space. A Newmark's scheme-based predictor-corrector algorithm is used to analyze the behaviors of the reduced system. Periodic solutions are calculated efficiently by Poincaré mapping method in combination with the Newmark's scheme-based predictor-corrector algorithm. Floquet multipliers are calculated to determine the local stability of these solution and to identify local bifurcation points. This method is efficient in analyzing both the stability and bifurcation of periodic motion in dynamic system mentioned above, especially for the secondary Hopf bifurcation, saddle-node bifurcation, period-doubling bifurcation, and chaotic motion.

Finally, a practical example, Fluid Film Bearing-Rotor Dynamic System with Squeeze Film Damper, is presented to examine the method, and it is verified that the method is efficient in analysis of large order dynamic system with local nonlinearities.

**Key words** nonlinear dynamics, stability, bifurcation, rotor, bearing

<sup>1)</sup> The project supported by the National Natural Science Foundation of China.

Received 6 August 1997, revised 18 December 1997.