第 29 卷 第 1 期 力 学 学 报 Vol 29, No. 1
1997 年 1 月 ACTA MECHANICA SINICA Jan. , 1997

存在间隙的多自由度系统的周期运动及 Robust 稳定性[1)]

曹登庆
(西南交通大学应用力学研究所, 成都 610031)
舒仲周
(西南交通大学工程力学系, 成都 610031)

摘要 研究一类存在间隙的多自由度振动系统的动态响应. 系统由线性元件构成, 但其中一个元件的最大位移不能超过由刚性平面约束所确定的阀值. 应用模态矩阵方法将系统解耦, 并根据碰撞条件和由碰撞规律所确定的衔接条件求得系统的周期运动及其稳定条件. 将 Lyapunov 方法应用于周期运动的扰动差分方程, 导出了含不确定参数的碰撞振动系统周期运动的鲁棒 (Robust) 稳定性条件. 文末用一个二自由度系统阐明了方法的有效性.

关键词 多自由度系统, 碰撞振动, 周期运动, 稳定性, 鲁棒稳定性

引 言

运动元件间存在间隙的振动系统在机械或机器振动问题中常常遇到, 当系统中某个元件的振幅超过给定限值时将发生碰撞. 本质非线性是碰撞振动系统的基本特征, 所以应用传统的解析工具 (例如线性化方法) 已不可能抓往系统响应的主要特点. 由于碰撞的存在, 使系统响应呈现出复杂的周期运动或混沌运动. 也正是由于碰撞的存在, 使得这类系统的动态响应变得十分复杂. 因此, 已有的大部分研究工作都只考虑了单自由度系统模型[1~4]或二自由度系统模型[5~7]. Masri[8], Nigm 和 Shabana[9]曾研究过多自由度碰撞振子的响应, 但没有考虑周期解的稳定性. 舒仲周[10]对多体碰撞振动系统的周期运动及其稳定性问题提出了统一解法. 为了考虑较为一般的情况, 同时也由于系统参数多、表达式复杂, 因此文献[10]着重讨论周期运动的求解方法, 在具体应用中尚有一定困难. Aidanpää 和 Gupta[6]虽然求出了二自由度碰撞振动系统的周期运动, 但其表达式十分繁杂. 文献[6]的分析方法不仅很难应用于工程, 而且就理论分析而言, 用于研究多自由度系也非常困难.

本文以文献[10]提出的求解方法为基础, 研究存在间隙的多自由度系统的碰撞振动问题. 通过矩阵运算给出周期运动所对应的初始条件及周期运动的扰动差分方程, 从而导出其稳定条件. 对于含不确定参数的系统, 则应用 Lyapunov 方法研究扰动差分方程的稳定性, 导出周期运动的鲁棒稳定性判据.

1 系统描述

考虑图1所示的 n 自由度振动系统. 质量为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的振子分别由线性弹簧

1) 国家自然科学基金资助项目.
1994-12-13 收到第一稿, 1996-06-05 收到修改稿

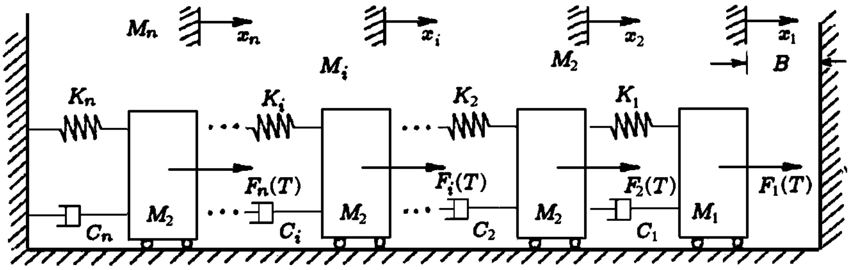

图1 多自由度碰撞振子

Fig 1 Multi- degree of freedom impact oscillator

K_1, K_2, ⋯, K_n 及线性阻尼器 C_1, C_2, ⋯, C_n 相联接. 假定阻尼是 Rayleigh 型比例阻尼. 作用在 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 上的激励是简谐激励 $F_i(T) = F_i \cdots, \cos(\Omega T + \delta)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. 当振子 M_1 的位移 $X_1(T)$ 等于间隙 B 时, 它将与刚性平面相撞. 设碰撞由恢复系数 R 确定, 碰撞持续时间略去不计. 不失一般性, 设 $M_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$, 并记

$$\left.\begin{aligned} &F_0 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2}, \quad m_i = m_i/M_1, \quad K_i = K_i/K_1 \\ &\zeta_i = C_i/(2\sqrt{K_1 M_1}), \quad \omega = \Omega/\sqrt{K_1/M_1}, \quad t = \sqrt{K_1/m_1}\,T \\ &f_i = F_i/F_0, \quad b = BK_1/F_0, \quad x_i = X_i K_1/F_0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}\right\}$$

考虑比例阻尼 $\zeta_i = \eta k_i$, 则系统在任意两次碰撞之间的无量纲化的运动微分方程为

$$M\ddot{x} + 2\eta K\dot{x} + Kx = F\cos(\omega t + \delta) \tag{1}$$

式中"·"表示对无量纲时间 t 求导数, $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ 是无量纲的位移矢量, $F = [f_1 f_2 \cdots f_n]^T$, 对角质量矩阵 $M = \mathrm{diag}[m_i]$, 而

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

设 M_1 与刚性平面在时刻 $t_i\ (i = 1, 2, \cdots)$ 发生碰撞. 以 t_i^- 和 t_i^+ 分别表示碰撞前后的瞬时, 则无量纲化后的碰撞条件为

$$x_1(t_i) = b, \quad \dot{x}_1(t_i^-) > 0, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

根据碰撞恢复系数 R 的定义, 可得无量纲化后的衔接条件为

$$\begin{bmatrix} x^+(t_i) \\ \dot{x}^+(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_i^+) \\ \dot{x}(t_i^+) \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} x(t_i^-) \\ \dot{x}(t_i^-) \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \tag{4}$$

式中 $D = \mathrm{diag}, [d_i]$ $(d_i = 1,\ i = 1, 2, \cdots, n, n+2, \cdots, 2n;\ d_{n+1} = -R)$.

2 周期运动的存在性

令每次碰撞后的时刻为 $t = 0$, 并以 $(0, t_j)$ 表示此阶段的时间. 应用模态分析方法, 取变换

$$x(t) = uy(t) \tag{5}$$

式中 u 是模态矩阵, 而 $y(t)$ 是系统的主坐标. 经坐标变换(5), 可将系统(1)解耦为

$$\ddot{y} + 2\mathrm{diag}\{\xi_i\omega_i\}\dot{y} + \mathrm{diag}\{\omega_i^2\}y = \bar{F}\cos(\omega t + \delta) \tag{6}$$

式中 $\omega_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是在无碰撞情况下系统的固有频率, $\xi_i = \eta\omega_i$, $\bar{F}[\bar{f}_1 \bar{f}_2 \cdots \bar{f}_n]^T = (u^T M u)^{-1} u^T F$. 记 $\omega_{di} = \omega_i\sqrt{1 - \xi_i^2}$, 容易求得微分方程(6)的解为

$$y(t) = \mathrm{diag}\{g_i(t)\}A + \mathrm{diag}\{h_i(t)\}B + \Phi(t)\cos\delta + \Psi(t)\sin\delta \tag{7}$$

式中 A, B 是与初始条件有关的常矢量, 且

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_n(t)]^T, \qquad \Psi(t) = [\psi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\psi_n(t)]^T$$
$$\varphi_i(t) = \gamma_i\cos\omega t + \beta_i\sin\omega t, \qquad \psi_i(t) = \beta_i\cos\omega t - \gamma_i\sin\omega t$$
$$\gamma_i = \frac{(\omega_i^2 - \omega^2)\bar{f}_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i\omega)^2}, \qquad \beta_i = \frac{2\xi_i\omega_i\omega\bar{f}_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i\omega)^2}$$
$$g_i(t) = \exp(-\xi_i\omega_i t)\sin(\omega_{di}t), \qquad h_i(t) = \exp(-\xi_i\omega_i t)\cos(\omega_{di}t)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

将(7)式微分后可得

$$\dot{y}(t) = \mathrm{diag}\{\dot{g}_i(t)\}A + \mathrm{diag}\{\dot{h}_i(t)\}B + \dot{\Phi}(t)\cos\delta + \dot{\Psi}(t)\sin\delta \tag{8}$$

令(7)和(8)式中 $t = 0$, 则可将 A, B 用 $y(0)$, $\dot{y}(0)$ 表出. 将 A, B 再代回(7), (8)式中, 并注意到变换(5)得

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = UW(t)U^{-1}\begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} + UE(t)\begin{bmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $2n \times 2n$ 阶块对角矩阵 $U = \mathrm{diag}\{u\ u\}$, 且

$$W(t) = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) \\ \dot{W}_{11}(t) & \dot{W}_{12}(t) \end{bmatrix}, \qquad E(t) = \begin{bmatrix} \Phi^*(t) & \Psi^*(t) \\ \dot{\Phi}^*(t) & \dot{\Psi}^*(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

这里 $\Phi^*(t) = [\varphi_1^*(t)\varphi_2^*(t)\cdots\varphi_n^*(t)]^T$, $\Psi^*(t) = [\psi_1^*(t)\ \psi_2^*(t)\cdots\psi_n^*(t)]$, 且

$$\varphi_i^*(t) = \varphi_i(t) - \left[\frac{\xi_i\omega}{\omega_{di}}g_i(t) + h_i(t)\right]\gamma_i - \frac{\omega}{\omega_{di}}\beta_i g_i(t)$$

$$\psi_i^*(t) = \psi_i(t) - \left[\frac{\xi_i\omega}{\omega_{di}}g_i(t) + h_i(t)\right]\beta_i + \frac{\omega}{\omega_{di}}\gamma_i g_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$W_{11}(t) = \mathrm{diag}\{\xi_i\omega g_i(t)/\omega_{di} + h_i(t)\}$$

$$W_{12}(t) = \mathrm{diag}\{g_i(t)/\omega_{di}\}$$

考虑周期为 $2N\pi/\omega$的周期N 运动, 则周期解应满足条件

$$\begin{bmatrix} x^+(2N\pi/\omega) \\ \dot{x}^+(2N\pi/\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} \tag{11}$$

将衔接条件(4)和周期性条件(11)代入表达式(9)可知, 周期运动所对应的初始条件应满足

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} = \left[I - DUW\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)U^{-1}\right]^{-1} DUE\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)\begin{bmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中 I 是 $2n \times 2n$ 阶单位矩阵. 令

$$S = \left[I - DUW\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)U^{-1}\right]^{-1} DUE\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right) \tag{13}$$

这里, $S = [s_{ij}]$ 是 $2n \times 2$ 阶矩阵, 其元素 s_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2)$ 完全由方程(1)的系数矩阵和碰撞恢复系数确定. 记 $c = s_{11}$, $s = s_{12}$, 根据(12)式第一式和碰撞条件(3)可得

$$x_1(0) = b = c\cos\delta + s\sin\delta \tag{14}$$

由此可知, 当 $c^2 + s^2 \geq b^2$ 时, 系统存在周期N 运动. 由(14)式求得

$$\sin\delta = \frac{bs \pm c\sqrt{c^2 + s^2 - b^2}}{c^2 + s^2}, \quad \cos\delta = \frac{bc \mp \sqrt{c^2 + s^2 - b^2}}{c^2 + s^2} \tag{15}$$

将(15)式代入(12)式, 容易求得初始条件 $x_i(0)$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$ 和 $\dot{x}_i(0)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 将此初始条件代入(9)式即求得周期解. 为使所求周期运动是系统的真实运动, (15)式中"$\pm$"号的选取应使在碰撞后的瞬时振子M_1 的速度小于零, 即 $\dot{x}_1(0) < 0$. 此外, 由于振子M_1 的位移受到刚性平面的限制, 其运动(包括周期运动)应满足

$$x_1(t) < b, \quad 0 < t < t_j \tag{16}$$

对于周期N 运动, (16)式中 $t_j = 2N\pi/\omega_0$. 条件(16)可由周期解的表达式(9)求出的具体数值来检验.

3 周期运动的稳定性与鲁棒稳定性分析

考虑周期运动在第 k 个周期的初瞬时(第 $k-1$ 次碰撞结束的瞬时) 的扰动, 见图2 一般

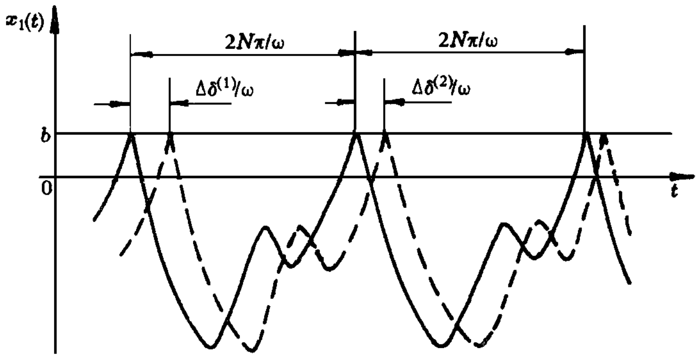

图2 周期 N 运动(实线) 和扰动运动(虚线)

Fig. 2 Periodic motion (solid line) and perturbed motion (dashed line)

地, 扰动运动和周期运动不是在同一时刻发生碰撞, 设扰动运动 $\tilde{x}(t)$ 和周期运动 $x(t)$ 发生碰撞的时刻相差 $\triangle t = \triangle\delta/\omega$. 不失一般性, 将初始扰动考虑在碰撞超平面 $x_1 = b$ 上, 则扰动运动和周期运动的初始相位差为 $\triangle\delta$. 设扰动运动 $\tilde{x}(t)$ 在第 $k-1$ 次和第 k 次碰撞结束时的瞬时状态分别为

$$\tilde{x}(0) = x(0) + \Delta x(0), \qquad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{x}(0) + \Delta\dot{x}(0) \tag{17}$$

和

$$\tilde{x}'(0) = x(0) + \Delta x'(0), \qquad \dot{\tilde{x}}'(0) = \dot{x}(0) + \Delta\dot{x}'(0) \tag{18}$$

显然, $\Delta x_1(0) = \Delta x_1'(0) = 0$. 记

$$\left.\begin{aligned} z_k &= [x_2(0)\Delta x_3(0)\cdots\Delta x_n(0)\Delta\dot{x}_1(0)\Delta\dot{x}_2(0)\cdots\Delta\dot{x}_n(0)\Delta\delta]^T \\ z_{k+1} &= [\Delta x_2'(0)\Delta x_3'(0)\cdots\Delta x_n'(0)\Delta\dot{x}_1'(0)\Delta\dot{x}_2'(0)\cdots\Delta\dot{x}_n'(0)\Delta\delta']^T \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

则由解的表达式(9) 微分可得

$$\begin{bmatrix}\Delta x(t)\\ \Delta x(t)\end{bmatrix} = UW(t)U^{-1}\begin{bmatrix}\Delta x(0)\\ \Delta x(0)\end{bmatrix} + UE(t)\begin{bmatrix}-\sin\delta\\ \cos\delta\end{bmatrix}\Delta\delta +$$

$$\left[U\dot{W}(t)U^{-1}\begin{bmatrix}x(0)\\ x(0)\end{bmatrix} + U\dot{E}(t)\begin{bmatrix}\cos\delta\\ \sin\delta\end{bmatrix}\right]\Delta t + O(r^2) \tag{20}$$

式中 $r^2 = \|z_k\|^2$. 注意到衔接条件(4), 由(20)式得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta x'(0)\\ \Delta \dot{x}'(0)\end{bmatrix} &= DUW\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)U^{-1}\begin{bmatrix}\Delta x(0)\\ \Delta \dot{x}(0)\end{bmatrix} + DUE\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)\begin{bmatrix}-\sin\delta\\ \cos\delta\end{bmatrix}\Delta\delta + \\ &D\left[U\dot{W}\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)U^{-1}\begin{bmatrix}x(0)\\ \dot{x}(0)\end{bmatrix} + U\dot{E}\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)\begin{bmatrix}\cos\delta\\ \sin\delta\end{bmatrix}\right]\Delta t + O(r^2)\end{aligned} \tag{21}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &DUW\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)U^{-1} = \begin{bmatrix}h^{(0)} & p\\ p_1 & H^{(0)}\end{bmatrix}, \quad DUE\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)\begin{bmatrix}-\sin\delta\\ \cos\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h^{(1)}\\ H^{(1)}\end{bmatrix}\\ &D\left[U\dot{W}\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)U^{-1}\begin{bmatrix}x(0)\\ \dot{x}(0)\end{bmatrix} + U\dot{E}\left(\frac{2N\pi}{\omega}\right)\begin{bmatrix}\cos\delta\\ \sin\delta\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}h^{(2)}\\ H^{(2)}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中 $h^{(0)}, h^{(1)}, h^{(2)} \in R^1$; $p^T, p_1, H^{(1)}, H^{(2)} \in R^{2n-1}$; $H^{(0)} \in R^{(2n-1)\times(2n-1)}$ 均与系统参数有关 引入(22)式的记号后, 注意到 $\Delta x_1'(0) = 0$, 则由(21)式可求得

$$\Delta t = -\frac{1}{h^{(2)}}[p\, h^{(1)}]z_k + O(r^2) \tag{23}$$

注意到 $\Delta\delta' = \omega\Delta t + \Delta\delta$, 则由(21)～(23)式得

$$Z_{k+1} = Gz_k + O(r^2) \tag{24}$$

式中

$$G = \begin{bmatrix} H^{(0)} - \dfrac{1}{h^{(2)}}H^{(2)}p & H^{(1)} - \dfrac{1}{h^{(2)}}h^{(1)}H^{(2)} \\ -\dfrac{1}{h^{(2)}}\omega p & 1 - \dfrac{\omega}{h^{(2)}}h^{(1)} \end{bmatrix} \tag{25}$$

引理 3.1[10] 由微分方程(1)、碰撞条件(3)和衔接条件(4)构成的碰撞振动系统M Ⅳ S 的周期运动的稳定性和差分方程(24)零解的稳定性等价.

根据引理3.1和 Perron 定理[11]即得

定理 3.1 如果矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$, 则碰撞振动系统M Ⅳ S 的周期N 运动是渐近稳定的

下面研究周期运动的鲁棒稳定性 设系统的不确定参数 $q \in Q \subset R^l$, Q 为给定闭集 差分方程(24)可写成如下形式的不确定离散时间系统

$$Z_{k+1} = G_0 Z_k + \Delta G(q) Z_k + S(Z_k, q), \quad q \in Q \tag{26}$$

式中 $S(Z_k, q)$ 是 Z_k 的不低于二次的项

设矩阵 G_0 是 Schur 稳定的 ($\rho(G_0) < 1$)，则离散时间 Lyapunov 矩阵方程

$$G_0^T P G_0 - P = - I \tag{27}$$

存在唯一的正定矩阵解 P. 对任意矩阵 A, B, 用 $\bar{\sigma}(A)$ 表示 A 的最大奇异值; $A \le B$ 表示其对应元素满足 $a_{ij} \le b_{ij}$; $|A|$ 表示以 A 的元素 a_{ij} 的绝对值为元素的矩阵, 即 $|A| = [|a_{ij}|]$. 记矩阵 $\Gamma = [\gamma_{ij}]$, 而

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\omega}\theta_{ij},\ \theta_{ij} = \max_{q \in Q}\{|\Delta g_{ij}(q)|\},\ \epsilon = \max_{\substack{i=1,2,\cdots,2n \\ j=1,2,\cdots,2n}}\{\theta_{ij}\} \tag{28}$$

则有 $\Delta G(q) \le |\Delta G(q)| \le \epsilon\Gamma$. 令 $\Gamma_1 = \frac{1}{2}(\Gamma^T|PG_0| + |G_0^T P|\Gamma)$, $\Gamma_2 = \Gamma^T|P|\Gamma$.

引理 3.2[12] 如果矩阵 G_0 Schur 稳定, 且

$$\epsilon < [(\bar{\sigma}^2(\Gamma_1) + \bar{\sigma}(\Gamma_2))^{1/2} - \bar{\sigma}(\Gamma_1)]/\bar{\sigma}(\Gamma_2) \triangleq \epsilon^0 \tag{29}$$

则离散时间系统(26)的零解鲁棒稳定.

根据引理3.1和引理3.2易得定理3.2.

定理 3.2 如果矩阵 G_0 Schur 稳定, 且(29)式成立, 则碰撞振动系统 MIVS 的周期 N 运动鲁棒稳定.

4 数值算例

考虑一个二自由度碰撞振动系统. 设无量纲系统参数 $\eta = 0.1$, $R = 0.6$, $f_2 = 0.0$, 且

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

下面分别讨论激振频率 ω 和间隙 b 对系统的周期运动及其稳定性的影响.

1) 间隙 $b = 0$. 考虑 ω 取值分别为1.2, 2.4及2.6的3种情况, 显然 $S^2 + C^2 \ge b^2$ 成立. 根据(25)式求得 G, 再算出其谱半径知: $\omega = 1.2$, 2.4 和3.6时, 分别存在稳定的周期1、周期2和周期3运动, 如图3所示.

2) 激振频率 $\omega = 1.0$, 间隙 b 为不确定参数 ($0.2 \le b \le 1.0$), 仅考虑周期1运动.

由(13)式求得 $s^2 + c^2 = 1.74355$. 因此, 对任意 $b \in [0.2, 1.0]$, 系统存在周期1运动. 取 $b = b_0 = 0.6$, 根据(25)式求得

$$G_0 = \begin{bmatrix} -0.177445 & 0.039713 & -0.070643 & 0.345996 \\ -0.020169 & 0.323905 & 0.144022 & -0.213799 \\ 0.262554 & -0.049062 & -0.179735 & -0.154322 \\ 0.090393 & 0.292730 & 0.161324 & 0.112559 \end{bmatrix}$$

且

$$|\Delta G(b)| \le \epsilon \begin{bmatrix} 0.019349 & 0.062658 & 0.034531 & 0.196054 \\ 0.067327 & 0.218037 & 0.120160 & 1.000000 \\ 0.099814 & 0.323237 & 0.178136 & 0.854205 \\ 0.039599 & 0.128237 & 0.070672 & 0.530487 \end{bmatrix},\ b \in [0.2, 1.0]$$

式中 $\epsilon = 0.313974$. 将 G_0 代入 Lyapunov 矩阵方程(27)求得正定矩阵 P，再利用(29)式算得 $\epsilon^0 = 0.343455$. 因此,根据定理3.2知系统的周期1运动在参数域 $Q = \{b:\ 0.2 \le b \le 1.0\}$ 内是鲁棒稳定的. 图4分别绘出了 $b = 0.2,\ 0.6$ 和1.0时的周期运动和相应的相平面图 $(\dot{x}_1 - x_1)$.

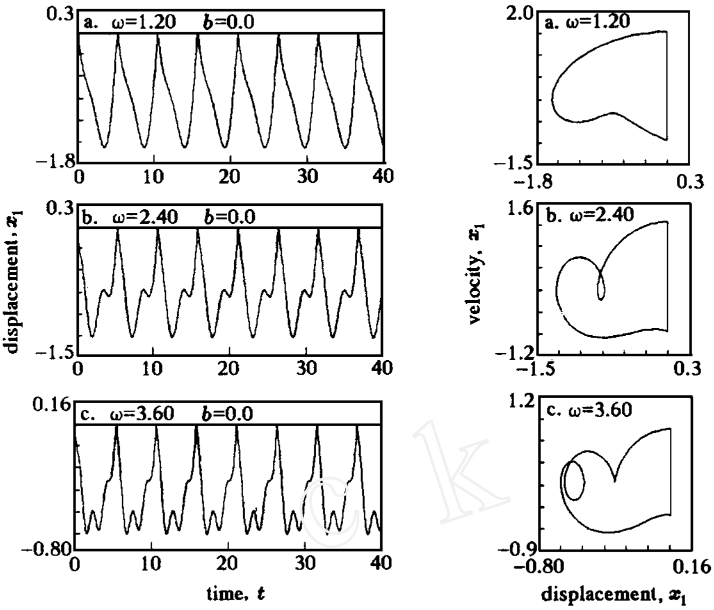

图 3 周期运动 $(x_1(t) - t)$ 和相图 $(\dot{x}_1 - x_1)$

Fig.3 Periodic motions $(x_1(t) - t)$ and phase plane portrits $(\dot{x}_1 - x_1)$

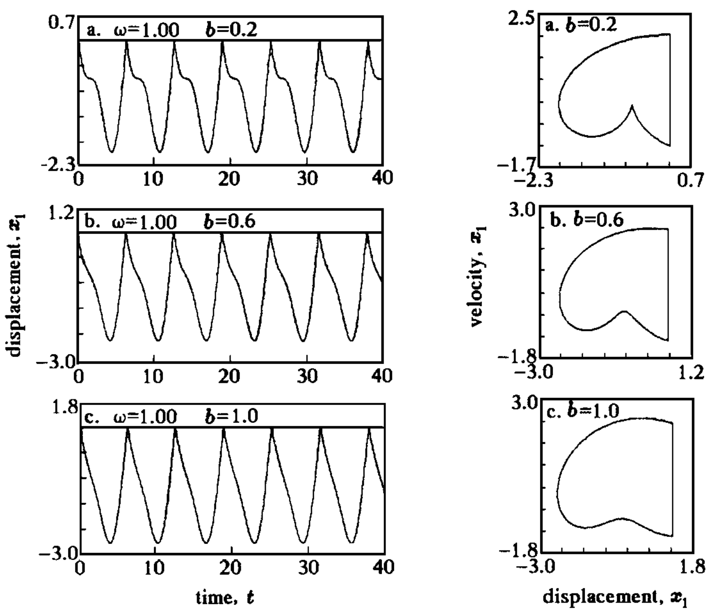

图4　周期运动 $(x_1 - t)$ 和相图 $(\dot{x}_1 - x_1)$

Fig. 4 Periodic motions $(x_1 - t)$ and phase plane portrits $(\dot{x}_1 - x_1)$

5 结 语

本文提出了研究具有间隙的多自由度系统的周期运动及其稳定性的分析方法 由于充分运用了矩阵运算的优越性, 所得周期解的表达式及其稳定条件不仅比文献[6]给出的简单, 而且适用于具有任意有限个自由度的系统 与文献[10]的工作比较, 则本文的研究使多自由度碰撞振动系统周期运动及其稳定性的分析方法又向实用的方面迈进一大步. 对于含不确定参数的碰撞振动系统的研究表明, 尽管系统的动态响应十分复杂, 其周期运动的稳定性在某些参数域内仍具有鲁棒性, 这一点对工程应用无疑是十分重要的

参 考 文 献

1 Shaw SW, Holmes PJ. A periodically forced piecewise linear oscillator. *J Sound and Vib*, 1983, 90(1): 129～155

2 舒仲周, 谢建华 碰撞振动的稳定性 西南交通大学学报, 1985, (3): 14～25

3 Karyeaclis M, Caughey TK. Stability of a semi- active impact damper, parts 1 and 2 *ASME J Appl Mech*, 1989, 56(6): 926～940

4 曹登庆 一类碰撞振子的鲁棒稳定性 见: 舒仲周主编 稳定、振动、分叉与混沌研究 北京: 中国科学技术出版社, 1992, 104～111

5 舒仲周, 圣小珍 双质体碰撞振动的自动隔振和完全稳定 机械工程学报, 1990, 26(3): 50～57

6 Aidanpaa JO, Gupta RB. Periodic and chaotic behaviour of a threshold- limited two- degree- of- freedom system. *J Sound and Vib*, 1993, 165(2): 305～327

7 Peterka F. Comments on ''Periodic and chaotic behaviour of a threshold- limited two- degree- of- freedom system''. *J Sound and Vib*, 1993, 165(2): 369～372

8 Masri SF. Steady- state response of a multidegree system with an impact damper. *ASME J Appl Mech*, 1973, 40(1): 127～132

9 Nigm MM, Shabana AA. Effect of an impact damper on a multi- degree of freedom system. *J Sound and Vib*, 1983, 89(4): 541～547

10 舒仲周 有碰撞存在的多体振动系统的周期运动和稳定条件 振动工程学报, 1990, 3(3): 42～51

11 LaSalle JP. The stability of dynamical systems Philadelphia: SIAM Press, 1976

12 Kolla SR, Yedavalli RK, Farison JB. Robust stability bounds on time varying perturbations for state- space models of linear discrete- time systems *Int J Control*, 1989, 50(1): 151～159

PERIODIC MOTIONS AND ROBUST STABILITY OF THE MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEMS WITH CLEARANCES

Cao Dengqing
(*Institute of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)
Shu Zhongzhou
(*Department of Engineering Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)

Abstract　An analysis is presented for determining the dynamical responses for a class of multi-degree-of-freedom systems with clearances or gaps. The systems consist of linear components, but the maximum displacement of one of the masses is limited to a threshold value by a rigid wall. The system is uncoupled by using modal matrix approach. Based on the impacting condition and the matching condition according to the impact law, we have derived the periodic motions and their stability conditions. Then, applying the Lyapunov method to the difference equations of disturbances of periodic motions, the conditions for the robust stability of the impact-vibrating systems with uncertain parameters are obtained. The effectiveness of the present approach is demonstrated by applying it to a two-degree-of-freedom system.

Key words　multi-degree-of-freedom system, impact-vibrating, periodic motion, stability, robust stability